

А. А. Вороненко, В. С. Федорова

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА.
ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ**

Учебно-методическое пособие

Москва — 2012

УДК 519.71

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова

Рецензенты: *Алексеев В. Б.*, профессор, д. ф.-м. н.
Дьяконов А. Г., доцент, к. ф.-м. н.

Вороненко А. А., Федорова В. С.

Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями: Учебно-методическое пособие. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова (лицензия ИД №05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2012. — 103 с.

В пособии представлены решения задач, входящих в программу аудиторных занятий по курсам «Дискретная математика» и «Дополнительные главы дискретной математики», читаемых студентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова. Все задачи взяты из учебника Г. П. Гаврилова, А. А. Сапоженко «Задачи и упражнения по дискретной математике» (М.: Физматлит, 2004). Пособие рассчитано на студентов первого и третьего курсов.

Авторы выражают благодарность Д. Кафтан, Д. Чистикову, ??? за помощь в подготовке пособия.

E-mail: mk@cs.msu.ru

© Факультет вычислительной математики и
кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова,
2012

© Вороненко А. А., Федорова В. С. 2012

Часть 1.

Курс «Дискретная математика»

Занятие № 1.1

ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. ФОРМУЛЫ. СУЩЕСТВЕННЫЕ И ФИКТИВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

I.1.18(1). По заданным векторно функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$: $\tilde{\alpha}_f = (0010)$, $\tilde{\alpha}_g = (1000)$, построить векторное представление функции $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3) \& g(x_2, x_1)$.

◀ Составим таблицу значений соответствующих функций:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_3)$	$g(x_2, x_1)$	$h(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Откуда получаем $\tilde{\alpha}_h = (0000\ 0000)$. ▶

I.1.19(3, 4). Построив таблицы соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы A_i и B_i , $i = 3, 4$:

3) $A_3 = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow y \cdot z)$, $B_3 = (x \vee (y \rightarrow z)) \cdot (x \oplus y)$;

4) $A_4 = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \mid (x \oplus y \cdot z)$, $B_4 = \bar{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \rightarrow z}$.

◀ Составим таблицу значений соответствующих функций:

x	y	z	A_3	B_3	A_4	B_4
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Из таблицы видно, что обе пары формул не эквивалентны. ►

I.1.20(4). Построив таблицу для функций $x \vee (y \sim z)$ и $(x \vee y) \sim (x \vee z)$, убедиться в справедливости их эквивалентности.

◀ Составим таблицу значений соответствующих функций:

x	y	z	$x \vee (y \sim z)$	$(x \vee y) \sim (x \vee z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Из неё видно, что исходные функции эквивалентны. ►

I.1.21(1, 2). Используя основные эквивалентности, доказать эквивалентность формул A и B :

1) $A = (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \sim (x \oplus y)), B = (\bar{x} \cdot \bar{y} \rightarrow x) \rightarrow y;$

2) $A = (x \cdot y \vee (\bar{x} \rightarrow y \cdot z)) \sim ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow z), B = (x \rightarrow y) \oplus (y \oplus z).$

◀ 1. С помощью преобразований приведем формулы A и B к одинаковому виду:

$$\begin{aligned}
 A &= (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \sim (x \oplus y)) = \\
 &= (x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \cdot (x \oplus y) \vee \overline{\bar{x} \cdot y} \cdot \overline{x \oplus y}) = \\
 &= (x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \cdot (x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y) \vee (x \vee \bar{y}) \cdot (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y})) = \\
 &= (x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \cdot y \vee x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}) = \\
 &= (\overline{x \vee y}) \vee (\bar{x} \vee x \cdot y) = \\
 &= \bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \vee x \cdot y = \\
 &= \bar{x} \vee x \cdot y = \\
 &= \bar{x} \vee y = \\
 &= x \rightarrow y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= (\bar{x} \cdot \bar{y} \rightarrow x) \rightarrow y = \\
 &= (x \cdot y \vee x) \rightarrow y = \\
 &= x \rightarrow y;
 \end{aligned}$$

В преобразованиях использовалось тождество

$$x \cdot K_1 \vee \bar{x} \cdot K_2 = x \cdot K_1 \vee \bar{x} \cdot K_2 \vee K_1 \cdot K_2,$$

справедливое для любых элементарных конъюнкций K_1, K_2 .

2. С помощью преобразований приведем формулы A и B к одинаковому виду:

$$\begin{aligned}
A &= (x \cdot y \vee (\bar{x} \rightarrow y \cdot z)) \sim ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow z) = \\
&= (x \cdot y \vee x \vee y \cdot z) \sim (\bar{x} \cdot y \vee z) = \\
&= (x \vee y \cdot z) \sim (\bar{x} \cdot y \vee z) = \\
&= (x \cdot z \vee y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z) \vee (\bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})\bar{z}(x \vee \bar{y})) = \\
&= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee y \cdot z \vee x \cdot z, \\
B &= (x \rightarrow y) \oplus (y \oplus z) = \\
&= (\bar{x} \vee y) \cdot (y \sim z) \vee (\overline{\bar{x} \vee y}) \cdot (y \oplus z) = \\
&= (\bar{x} \vee y) \cdot (y \cdot z \vee \bar{y} \cdot \bar{z}) \vee x \cdot \bar{y} \cdot (y \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot z) = \\
&= \bar{x} \cdot y \cdot z \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z = \\
&= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z = \\
&= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee y \cdot z \vee x \cdot z. \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

I.1.28(1, 2). Указать все фиктивные переменные функции f :

- 1) $f(\tilde{x}^3) = (10101010)$;
- 2) $f(\tilde{x}^3) = (01100110)$.

◀ 1. Имеем:

$$\begin{aligned}
f(0, 0, 0) &= f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = 1, \\
f(0, 0, 1) &= f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 0,
\end{aligned}$$

откуда видно, что значение функции зависит только от значения переменной x_3 , то есть переменные x_1, x_2 — фиктивные.

2. Имеем:

$$\begin{aligned}
f(0, 0, 0) &= f(1, 0, 0), \\
f(0, 0, 1) &= f(1, 0, 1), \\
f(0, 1, 0) &= f(1, 1, 0), \\
f(0, 1, 1) &= f(1, 1, 1),
\end{aligned}$$

откуда видно, что значение функции не зависит от значения переменной x_1 .

На наборах (000) и (001) функция принимает различные значения, откуда следует, что переменная x_3 существенная.

На наборах (000) и (010) функция принимает различные значения, откуда следует, что переменная x_2 существенная.

Таким образом, x_1 является единственной фиктивной переменной рассматриваемой функции. ▶

I.1.31(1, 2).

1. Доказать, что если у функции $f(\tilde{x}^n)$ ($n \geq 1$) имеются фиктивные переменные, то она принимает значение 1 на чётном числе наборов.
2. Выяснить, верно ли утверждение, обратное к 1.

◀ 1. Пусть x_1 — фиктивная переменная.

Тогда, если на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ функция принимает значение 1, то на наборе $(\bar{\alpha}_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ функция также принимает значение 1.

Таким образом, число наборов переменных, на которых функция принимает значение 1, кратно 2.

2. В общем случае обратное утверждение не верно. Например, функция $f = x_1 \oplus x_2$ принимает значение 1 на чётном числе наборов, но не имеет фиктивных переменных. ▶

I.1.33(1, 2). Выяснить, какие переменные функции f являются существенными:

- 1) $f(\tilde{x}^4) = (1001 \ 0011 \ 0011 \ 0010)$;
- 2) $f(\tilde{x}^4) = (0110 \ 0111 \ 0111 \ 0110)$.

◀ 1. Функция $f(\tilde{x}^4) = (1001 \ 0011 \ 0011 \ 0010)$ принимает значение 1 на нечётном числе наборов, поэтому фиктивных переменных у неё нет.

2. Функция $f(\tilde{x}^4) = (0110 \ 0111 \ 0111 \ 0110)$ не имеет фиктивных переменных, так как

$$0 = f(0, 0, 0, 0) \neq f(0, 0, 0, 1) = 1 \Rightarrow x_4 - \text{существенная переменная};$$

$$0 = f(0, 0, 0, 0) \neq f(0, 0, 1, 0) = 1 \Rightarrow x_3 - \text{существенная переменная};$$

$$0 = f(0, 0, 1, 1) \neq f(0, 1, 1, 1) = 1 \Rightarrow x_2 - \text{существенная переменная};$$

$$0 = f(0, 0, 1, 1) \neq f(1, 0, 1, 1) = 1 \Rightarrow x_1 - \text{существенная переменная.} \quad \blacktriangleright$$

I.1.34(5). Выяснить, при каких n ($n \geq 2$) функция $f(\tilde{x}^n) = (x_1 | x_2) \oplus (x_2 | x_3) \oplus \dots \oplus (x_{n-1} | x_n) \oplus (x_n | x_1)$ зависит существенно от всех своих переменных.

◀ Если $n=2$, то $f = (x_1 | x_2) \oplus (x_2 | x_1) \equiv 0$, а следовательно, все переменные у неё фиктивные.

Покажем, что при $n \geq 3$ у функции нет фиктивных переменных.

Функция инвариантна относительно циклического сдвига переменных, поэтому все переменные либо существенны, либо фиктивны. Поскольку $f(1, \dots, 1) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$, то получаем, что все переменные данной функции существенны. ▶

Занятие № 1.2

ДНФ, КНФ, СФЭ

I.2.3(3). Представить в виде совершенной ДНФ следующую функцию:

$$f(x, y, z) = (0101 \ 0001).$$

◀ Рассмотрим наборы, на которых функция принимает значение 1 (соответствующие строки таблицы выделены):

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Совершенная ДНФ функции имеет вид:

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z. \quad \blacktriangleright$$

I.2.12(1). Применяя преобразования вида $A = A \cdot \bar{x} \vee A \cdot x$ и $A \vee A = A$, построить из заданной ДНФ функции $f(\tilde{x}^n)$ её совершенную ДНФ:

$$f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_3.$$

◀

$$\begin{aligned}
 f(\tilde{x}^3) &= x_1 x_2 \vee \bar{x}_3 = \\
 &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 = \\
 &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \\
 &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

I.2.18(1). Найти длину совершенной ДНФ функции $f(\tilde{x}^n)$ ($n \geq 2$):

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

◀ По определению, длина совершенной ДНФ равна количеству наборов, на которых функция принимает значение 1.

В нашем случае легче посчитать число наборов, на которых функция принимает значение 0:

- n наборов, на которых ровно одна переменная равна 1,
- 1 нулевой набор.

Вычитая из общего числа наборов количество наборов, на которых функция принимает значение 0, получим длину совершенной ДНФ:

$$2^n - n - 1.$$



I.2.4(5). Представить в виде совершенной КНФ следующую функцию:

$$f(x, y, z) = (0101 \ 1101).$$

◀ Рассмотрим наборы, на которых функция принимает значение 0 (соответствующие строки таблицы выделены):

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Совершенная КНФ функции имеет вид:

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$



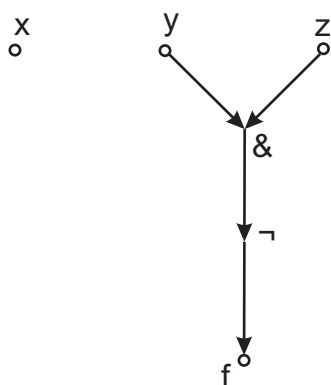
Задание. Построить СФЭ для функции из номера I.1.17(1) с уменьшением числа элементов:

$$((x \rightarrow \bar{y}) \vee (x \oplus z)) \cdot (y \mid z).$$

◀ Упростим формулу:

$$\begin{aligned}
 & ((x \rightarrow \bar{y}) \vee (x \oplus z)) \cdot (y \mid z) = \\
 & = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z}) = \\
 & = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z}) = \\
 & = \bar{y} \vee \bar{z} = \overline{y \& z}.
 \end{aligned}$$

Строим схему из функциональных элементов:

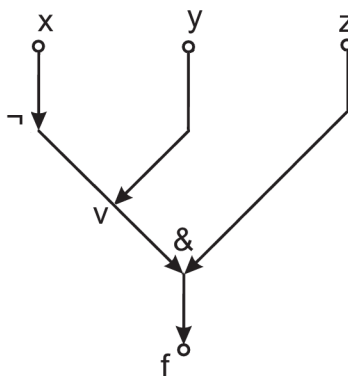


Задание. Построить СФЭ для функции из номера I.2.3(3) с уменьшением числа элементов:

$$f(x, y, z) = (0101 \ 0001).$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z = \\ &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee y \cdot z = \\ &= z \cdot (y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}) = \\ &= z \cdot (y \vee \bar{x}). \end{aligned}$$

Строим схему из функциональных элементов:



Занятие № 1.3

Полиномы и линейные функции

I.2.22(5). Методом неопределённых коэффициентов найти полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}^3) = (0110 \ 1001)$.

◀ Для функции трёх переменных полином Жегалкина имеет вид:

$$\alpha \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_3 \oplus \gamma_1 x_1 x_2 \oplus \gamma_2 x_1 x_3 \oplus \gamma_3 x_2 x_3 \oplus \delta x_1 x_2 x_3.$$

Составим систему:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	$0 = \alpha,$
0	0	1	$1 = \alpha \oplus \beta_3,$
0	1	0	$1 = \alpha \oplus \beta_2,$
0	1	1	$0 = \alpha \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \gamma_3,$
1	0	0	$1 = \alpha \oplus \beta_1,$
1	0	1	$0 = \alpha \oplus \beta_1 \oplus \beta_3 \oplus \gamma_2,$
1	1	0	$0 = \alpha \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \gamma_1,$
1	1	1	$1 = \alpha \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \delta$

Отсюда получим коэффициенты полинома Жегалкина:

$$\alpha = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0, \delta = 0.$$

Полином Жегалкина исходной функции имеет вид $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. ▶

I.2.23(7). Преобразуя вектор значений функции

$$f(\tilde{x}^4) = (0000 \ 0100 \ 0110 \ 0111),$$

построить полином Жегалкина для этой функции.

◀ Будем преобразовывать вектор значений функции с помощью определённой по индукции операции T (подробнее см. [2, с. 53]):

- Если $n = 1$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$, то $T(\tilde{\alpha}) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$.
- Предположим, что операция T уже определена для каждого вектора $\tilde{\sigma}$ из B^{2^n} , и рассмотрим произвольный вектор $\tilde{\alpha}$ из $B^{2^{n+1}}$.

Пусть $\tilde{\alpha} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2^n-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2^n-1})$ и

$$T(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2^n-1}) = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2^n-1}),$$

$$T(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2^n-1}) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2^n-1})$$

(δ_i и ε_j по индуктивному предположению известны). Тогда

$$T(\tilde{\alpha}) = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2^n-1}, \delta_0 \oplus \varepsilon_0, \delta_1 \oplus \varepsilon_1, \dots, \delta_{2^n-1} \oplus \varepsilon_{2^n-1}).$$

В процессе преобразований получают векторы:

$$\begin{aligned} &(0000\ 0100\ 0110\ 0111), \\ &(0000\ 0100\ 0111\ 0110), \\ &(0000\ 0101\ 0110\ 0111), \\ &(0000\ 0101\ 0110\ 0001), \\ &(0000\ 0101\ 0110\ 0100). \end{aligned}$$

Получили вектор коэффициентов полинома Жегалкина:

$$\tilde{\beta}_f = (0000\ 0101\ 0110\ 0100).$$

Таким образом,

$$f = x_2x_4 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_4. \quad \blacktriangleright$$

И.2.28. Найти функцию $f(\tilde{x}^n)$, у которой длина полинома Жегалкина в 2^n раз превосходит длину её совершенной ДНФ ($n \geq 1$).

◀ Так как длина полинома не превосходит 2^n , то длина совершенной ДНФ не превосходит 1. Значит, длина полинома — 2^n , а вектор коэффициентов полинома $\tilde{\beta}_f = (\underbrace{1111 \dots 1111}_{2^n})$. Такой вектор соответствует функции $f = (x_1 \oplus 1) \cdot \dots \cdot (x_n \oplus 1) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n$. ▶

И.3.1(6). Представив функцию $f = ((x \rightarrow y)(y \rightarrow x)) \sim z$ полиномом, выяснить, является ли она линейной.

◀ Преобразуем функцию f :

$$\begin{aligned} f &= ((x \rightarrow y)(y \rightarrow x)) \sim z = \\ &= ((\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x)) \sim z = \\ &= (x \sim y) \sim z = \\ &= x \oplus y \oplus z. \end{aligned}$$

Следовательно, функция f линейна. ▶

И.3.7. 1) Показать, что если функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде $f(\tilde{x}^n) = x_n \oplus \varphi$, где φ не зависит от x_n , то $|N_f| = 2^{n-1}$.

2) Показать, что если f линейна и отлична от константы, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

◀ 1) При фиксированных $x_1, \dots, x_{n-1}$ функция $x_n \oplus \varphi$ принимает значение 1 ровно для одного значения x_n . Следовательно, $|N_f| = 2^{n-1}$.

2) Так как функция f линейна и отлична от константы, то можно выделить слагаемое x_k . Оставшаяся часть не зависит от x_k , следовательно,

можно воспользоваться фактом, доказанным в предыдущем пункте. Таким образом, $|N_f| = 2^{n-1}$. ►

II.3.2(10). Выяснить, является ли линейной функция с вектором значений $\tilde{\alpha}_f = (0110 \ 1001 \ 0110 \ 1001)$.

◄ **I-й способ:** Найдем вектор $\tilde{\beta}_f$ коэффициентов полинома Жегалки для функции f . Получим $\tilde{\beta}_f = (0110 \ 1000 \ 0000 \ 0000)$. Отличны от нуля лишь компоненты $\beta_1, \beta_2, \beta_4$ с номерами, являющимися степенями двойки. Следовательно, функция линейна.

II-й способ: Разобьём вектор $\tilde{\alpha}_f$ на две равные по числу компонент части:

$$\tilde{\alpha}_f = (\tilde{\alpha}_{f_0}, \tilde{\alpha}_{f_1}), \quad f = \bar{x}_1 f_0 \vee x_1 f_1.$$

$\tilde{\alpha}_{f_0} = \tilde{\alpha}_{f_1} = (0110 \ 1001)$, так что $f_0 \equiv f_1$, переменная x_1 фиктивна и $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_0(x_2, x_3, x_4)$. Повторив процедуру для $\tilde{\alpha}_{f_0}$, получим пару противоположных векторов $\tilde{\alpha}_{f_{00}} = (0110)$ и $\tilde{\alpha}_{f_{01}} = (1001)$, так что переменная x_2 — существенная, $f_0(x_2, x_3, x_4) = x_2 \oplus f_{00}(x_3, x_4)$. Функция $f_{00}(x_3, x_4)$ имеет вектор значений $\tilde{\alpha}_{f_{00}} = (0110)$ и потому является суммой по модулю два переменных x_3 и x_4 — линейной функцией, так что окончательно $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$ — линейная функция. ►

II.3.2(11). Выяснить, является ли линейной функция с вектором значений $\tilde{\alpha}_f = (1010 \ 0101 \ 1001 \ 1100)$.

◄ Предположим, что функция f линейна. Тогда переменная x_1 фиктивная, так как $f(0, 0, 0, 0) = f(1, 0, 0, 0)$. Но тогда должны совпадать и, например, $f(0, 1, 0, 0)$ и $f(1, 1, 0, 0)$, что не соблюдается. Пришли к противоречию, следовательно, предположение о том, что f — линейная функция, неверно, то есть f нелинейна. ►

II.3.3(4). Заменить в векторе $\tilde{\alpha} = (-001 \ --1-)$ прочерки символами 0 и 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f . Выразить f полиномом.

◄ 1) В силу линейности значения функции на наборах, различающихся значением только одной существенной переменной, должны быть различными.

Так как $f(0, 1, 0) \neq f(0, 1, 1)$, то переменная x_3 существенная, следовательно, $f(0, 0, 0) = 1$, $f(1, 1, 1) = 0$.

Так как $f(0, 1, 1) \neq f(1, 1, 1)$, то переменная x_1 существенная, следовательно, вектор значений функции $\tilde{\alpha} = (1001 \ 0110)$.

2) Функция f линейна, фиктивных переменных нет, $f(0, 0, 0) = 1$, следовательно, $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$. ►

Занятие № 1.4

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

II.1.9(1, 2, 5, 6). Выяснить, является ли множество A замкнутым классом. Предполагается, что вместе с каждой функцией f из A множеству A принадлежат и все функции из P_2 , конгруэнтные f :

- 1) $A = \{0, 1\}$;
- 2) $A = \{\bar{x}\}$;
- 5) $A = \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n, n = 1, 2, \dots\}$;
- 6) $A = \{x_1 \oplus \dots \oplus x_n, n = 1, 2, \dots\}$.

- ◀ 1. Множество $A = \{0, 1\}$ является замкнутым, так как суперпозициями функций 0 и 1 являются только функции, тождественно равные нулю и единице.
2. Множество $A = \{\bar{x}\}$ не замкнуто, так как суперпозиция функций $\bar{x}$ и $\bar{x}$ есть функция $\overline{(\bar{x})} = x$, не принадлежащая множеству A .
5. Множество $A = \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является замкнутым, так как при суперпозиции функций из A получаем функцию из A . Действительно, при подстановке вместо любого $x_i, 1 \leq i \leq n$, функции из A мы лишь заменяем этот множитель на группу множителей, а после замены всех произведений вида $x_k \cdot x_k$ на x_k получим функцию из A .
6. Множество $A = \{x_1 \oplus \dots \oplus x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не замкнуто, так как при суперпозиции $x_1 \oplus x_2$ и x_1 получим $x_1 \oplus x_1 \equiv 0$ — функцию, не принадлежащую множеству A . ▶

II.1.13(1, 3). Выяснить какое из отношений: $\subseteq, \supseteq, =$ или ни одно из них, — выполняется для множеств K_1, K_2 из P_2 :

- 1) $K_1 = [A_1 \cap A_2], K_2 = [A_1] \cap [A_2]$;
- 3) $K_1 = [A_1 \cup (A_2 \cap A_3)], K_2 = [A_1 \cup A_2] \cap [A_1 \cup A_3]$.

- ◀ 1. Так как $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$, то $[A_1 \cap A_2] \subseteq [A_1]$. Аналогично $[A_1 \cap A_2] \subseteq [A_2]$. Откуда следует, что $[A_1 \cap A_2] \subseteq [A_2] \cap [A_2]$.

Покажем, что отношение $\subseteq$ в общем случае не переходит в равенство. Для этого рассмотрим $A_1 = \{\downarrow\}, A_2 = \{|\}$. Тогда $K_1 = \emptyset \subset P_2 = K_2$.

3. Перепишем K_1 в виде $K_1 = [(A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)]$ и обозначим $A_1 \cup A_2 = B_1, A_1 \cup A_3 = B_2$. При этом $K_1 = [B_1 \cap B_2], K_2 = [B_1] \cap [B_2]$, а из предыдущего пункта получим $[K_1] \subseteq [K_2]$. ▶

II.4.1(1). Выяснить, принадлежит ли функция

$$f = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_1)$$

множеству $T_1 \setminus T_0$.

◀ Функция принадлежит множеству $T_1 \setminus T_0$, если на единичном и на нулевом наборах она принимает значение 1, то есть $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 1$. Для данной функции $f = (0 \rightarrow 0)(0 \rightarrow 0)(0 \rightarrow 0) = 1$ и $f = (1 \rightarrow 1)(1 \rightarrow 1)(1 \rightarrow 1) = 1$, поэтому $f \in T_1 \setminus T_0$. ▶

II.2.1(1, 12). Выяснить, является ли функция f самодвойственной:

1) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;

12) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$.

- ◀ 1. Функция является самодвойственной, так как согласно принципу двойственности $f^* = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_1) = f$.
12. Функция не является самодвойственной, так как она отличается от самодвойственной функции $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$ только на наборе $(1, 1, 1)$, так что вектор её значений содержит 4 ± 1 – не половину единиц. ▶

Замечание для последующих задач: самодвойственная функция задана вектором $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^{n-1}-1}, \bar{\alpha}_{2^{n-1}-1}, \dots, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_0). \quad (S)$$

II.2.2(3, 11). Выяснить, является ли самодвойственной функция f , заданная векторно:

3) $\tilde{\alpha}_f = (1001 \ 0110)$;

11) $\tilde{\alpha}_f = (1100 \ 0011 \ 1010 \ 0101)$.

- ◀ 3. Вектор значений функции

$$\tilde{\alpha}_f = (1001 \ 0110)$$

удовлетворяет условию (S), поэтому функция является самодвойственной.

11. Функция не является самодвойственной, так как

$$f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1) = f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}). \quad \blacktriangleright$$

II.2.7. Доказать, что не существует самодвойственных функций, существенно зависящих в точности от двух переменных.

◀ Количество самодвойственных функций, которые зависят от двух переменных, равно $2^{2^{n-1}} \Big|_{n=2} = 4$ — это $x, y, \bar{x}, \bar{y}$. Таким образом, не существует самодвойственной функции, существенно зависящей ровно от двух переменных. ▶

П.2.8(2). Выяснить, при каких $n \geq 2$ является самодвойственной функция

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

◀ Очевидно, что при $n = 2$ функция $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ не является самодвойственной.

При $n = 3$ функция представляет из себя *медиану*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1 = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 x_1,$$

которая является самодвойственной функцией.

При $n > 3$ выполнено соотношение

$$f(1100 \alpha_5 \dots \alpha_n) = f(0011 \bar{\alpha}_5 \dots \bar{\alpha}_n) = 1,$$

следовательно, функция не является самодвойственной.

Таким образом, только при $n = 3$ функция $f(\tilde{x}^n)$ самодвойственна. ▶

Занятие № 1.5

КЛАСС М. ПОДСЧЁТ ЧИСЛА ФУНКЦИЙ

Замечание для последующих задач: проверку на монотонность функции f , заданной своим вектором значений, можно осуществить следующим образом: f монотонна тогда и только тогда, когда она монотонна на каждой паре соседних наборов.

П.5.1(1, 3, 8). По вектору значений $\tilde{\alpha}_f$ выяснить, является ли функция f монотонной:

- 1) $\tilde{\alpha}_f = (0110)$;
- 3) $\tilde{\alpha}_f = (0101 \ 0111)$;
- 8) $\tilde{\alpha}_f = (0001 \ 0101 \ 0111 \ 0111)$.

◀ 1. Монотонность нарушается на наборах (10) и (11).

3, 8. Следуя алгоритму проверки из замечания, получим, что функция является монотонной. ▶

П.5.2(3). Проверить, является ли функция $f = x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$ монотонной.

◀ f не является монотонной, поскольку $f(0, 0) = 1$, а $f(1, 0) = 0$. ▶

П.5.4(6). Пусть M_n — множество векторов $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$, являющихся векторами значений монотонной функции. Найти число векторов из M_n , которые можно получить из вектора $\tilde{\gamma}^8 = (---1---0-)$ заменой символа «—» на 0 или 1.

◀ В силу монотонности $f(1, 1, 1) = 1$, $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = 0$, так что вектор значений должен иметь вид $(0-01\ 0-01)$.

При доопределении функции на оставшихся двух наборах возможны три варианта:

(0001 0001),

(0001 0101),

(0101 0101). ▶

П.5.5(4). Пусть MS_n — множество векторов $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$, являющихся векторами значений функций из класса $M \cap S$. Найти число векторов из MS_n , которые можно получить, заменяя в векторе $\tilde{\gamma}^8 = (-00- 0---)$ символы «—» на 0 или 1.

◀ Так как искомые функции являются самодвойственными, то их векторы значений примут вид $(-001\ 011-)$. Исходя из монотонности функций, окончательно получим $(0001\ 0111)$ — единственный вектор из MS_n , удовлетворяющий условию. ▶

П.5.21(2, 3). Подсчитать число функций в каждом из следующих множеств:

2) $M^n \setminus (T_1 \cap T_0)$;

3) $M^n \cap L$.

◀ 2. Так как $f(\tilde{x}^n) \notin T_1 \cap T_0$, то её вектор значений $\tilde{\alpha}_f$ может иметь вид

$(0---\dots--0), (1---\dots--0)$ или $(1---\dots--1)$.

Функция монотонна, значит, случай $(1---\dots--0)$ не подходит.

Вектор $(0---\dots--0)$ соответствует единственной монотонной функции $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$, а вектор $(1---\dots--1)$ — $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$.

Получаем, что в множестве $M^n \setminus (T_1 \cap T_0)$ всего 2 функции.

3. Линейная функция, имеющая не менее двух существенных переменных, не монотонна. Это следует из того, что при подстановке констант вместо остальных переменных получается немонотонная

функция $y_1 \oplus y_2$ или $y_1 \oplus y_2 \oplus 1$. Следовательно, исходному множеству принадлежат всего $n + 2$ функции: $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$. ►

П.4.3(1, 5, 15, 30). Подсчитать число функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и принадлежащих множеству A :

- 1) $A = T_0 \cap T_1$;
- 5) $A = T_0 \cup L$;
- 15) $A = (T_0 \setminus T_1) \cap S$;
- 30) $A = (L \setminus (T_0 \cup T_1)) \cap S$.

◀ 1. Вектор значений функции $f \in A = T_0 \cap T_1$ имеет вид

$$(0 \text{---} \dots \text{---} 1).$$

Длина вектора значений функции n переменных равна 2^n . В нашем случае 2 элемента вектора значений уже известны, значит, доопределить вектор значений функции можно 2^{2^n-2} способами.

5. $|A| = |T_0| + |L| - |T_0 \cap L|$.

$|T_0| = 2^{2^n-1}$, рассуждая аналогично предыдущему пункту.

$|L| = 2^{n+1}$, так как произвольная линейная функция n переменных имеет вид

$$f(\tilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n,$$

и количество функций в L совпадает с количеством способов выбора наборов $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

$|T_0 \cap L| = 2^n$, так как если $f \in T_0$, то $f(0, 0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$, а значит, остается выбрать n значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, а это можно сделать 2^n способами.

В итоге получим $|A| = 2^{2^n-1} + 2^{n+1} - 2^n = 2^{2^n-1} + 2^n$.

15. Так как $f \in T_0$, то $f(0, 0, \dots, 0) = 0$. Поскольку $f \notin T_1$, то $f(1, 1, \dots, 1) = 0$. Но тогда $f(0, 0, \dots, 0) = f(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$, а следовательно, функция не является самодвойственной. Значит, множество A пустое.

30. Произвольная линейная функция n переменных имеет вид $f(\tilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n$. Так как $f(\tilde{x}^n) \notin T_0 \cup T_1$, то $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n = 1$, причем количество существенных переменных нечетно. Такая функция $f(\tilde{x}^n)$ самодвойственна, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Условие $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i = 1$ можно переписать в виде $\alpha_n = 1 \oplus \alpha_1 \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1}$, откуда получаем, что при переборе всех наборов длины $n - 1$ будут перечислены все наборы, содержащие нечетное число единиц. Следовательно, множество A содержит ровно 2^{n-1} функций. ►

Занятие № 1.6

ПОЛНОТА И ШЕФФЕРОВОСТЬ В АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

II.6.1(1). Выяснить, полна ли система функций

$$A = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \vee yz \vee zx\}.$$

◀ Составим критериальную таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
xy	+	+	−	−	+
$x \vee y$	+	+	−	−	+
$x \oplus y$	+	−	+	−	−
$xy \vee yz \vee zx$	+	+	−	+	+

Из таблицы видно, что система A не полна, так как $A \subseteq T_0$. ▶

II.6.2(4). Выяснить, полна ли система функций

$$A = \{f_1 = (0101), f_2 = (1110 \ 1000), f_3 = (0110 \ 1001)\}.$$

◀ Составим критериальную таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
$f_1 = (0101)$	+	+	+	+	+
$f_2 = (1110 \ 1000)$	−	−	−	+	−
$f_3 = (0110 \ 1001)$	+	+	+	+	−

Из таблицы видно, что система A не является полной, так как $A \subseteq S$. ▶

II.6.3(1). Выяснить, полна ли система $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$.

◀ Рассмотрим функцию $m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ из множества $S \cap M$, а также функции $x \sim y = x \oplus y \oplus 1$ и $\bar{x} = x \oplus 1$ из множества $L \setminus M$. Составим критериальную таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
$m(x, y, z)$	+	+	−	+	+
$x \sim y$	−	+	+	−	−
$\bar{x}$	−	−	+	+	−

Ясно, что $[A] \supseteq [\{m(x, y, z), x \sim y, \bar{x}\}] = P_2$, так что система A полна в P_2 . ▶

II.6.11. Доказать, что если f монотонна и зависит существенно не менее чем от двух переменных, то система $\{0, \bar{f}\}$ полна в P_2 .

◀ Функция $g \equiv 0 \notin T_1 \cup S$. Так как функция f монотонна и зависит существенно хотя бы от одной переменной, то $f(0, \dots, 0) = 0$, так как иначе $f \equiv 1$ и не зависит существенно ни от одной переменной. Таким образом, $\bar{f}(0, \dots, 0) = 1$ и $f \notin T_0$. Так как $\bar{f}(0, \dots, 0) = 1$ и функция существенно зависит от хотя бы одной переменной, то существует набор, на котором функция принимает значение 0, но тогда она не является монотонной; таким образом, $\bar{f} \notin M$. Поскольку множество $M \cap L$ не содержит функций, существенно зависящих от двух переменных, то f нелинейна, а значит, нелинейна и $f \oplus 1 = \bar{f}$.

Таким образом, рассматриваемая система функций является полной в P_2 . ▶

II.6.5(1). Из полной в P_2 системы

$$A = \{1, \bar{x}, xy(x \oplus y), x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx\}$$

выделить всевозможные базисы.

◀ Составим критериальную таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
$f_1 = 1$	—	+	+	—	+
$f_2 = \bar{x}$	—	—	+	+	—
$f_3 = xy(x \oplus y) \equiv 0$	+	—	+	—	+
$f_4 = x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx$	+	+	—	+	—

f_4 войдет в базис в любом случае, а из оставшихся функций можно выбрать любые две. Искомые базисы $B_1 = \{f_1, f_2, f_4\}$, $B_2 = \{f_1, f_3, f_4\}$, $B_3 = \{f_2, f_3, f_4\}$. ▶

II.6.8(4, 8). Выяснить, можно ли расширить до базиса в P_2 множество A :

4) $A = \{x \vee y, xy\}$;

8) $A = \{x \oplus y, x \sim y\}$.

◀ 4. Составим критериальную таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
$x \vee y$	+	+	—	—	+
xy	+	+	—	—	+

Множество A дополнить до базиса нельзя, так как функции $x \vee y$ и xy принадлежат одним и тем же предполным классам.

8. Составим критериальную таблицу:

	T_0	T_1	L	S	M
$x \oplus y$	+	—	+	—	—
$x \sim y$	—	+	+	—	—

Из таблицы видно, что множество A можно дополнить до базиса нелинейной функцией, принадлежащей T_0 и T_1 (например, конъюнкцией xy). ►

П.6.15. Доказать, что если $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, то f — шепферова функция.

◄ Утверждение следует из того, что $M \subseteq T_0 \cup T_1$ и $L \subseteq T_0 \cup T_1 \cup S$. ►

П.6.16. Подсчитать число шепферовых функций в $P_2(X^n)$.

◄ Если $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, то f — шепферова функция, а значит, число шепферовых функций в $P_2(X^n)$ равно числу всех возможных функций, не принадлежащих $T_0 \cup T_1$, без всех самодвойственных функций, не принадлежащих $T_0 \cup T_1$: $2^{2^n-2} - \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} = 2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$. ►

П.6.10(4). Выяснить, при каких $n \geq 2$ функция

$$f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

является шепферовой.

◄ Очевидно, что $f \notin T_0$. Кроме того, $f \notin T_1$ тогда и только тогда, когда количество слагаемых $x_i x_j$, $1 \leq i < j \leq n$, нечётно. Количество слагаемых $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ нечётно при $n = 4k + 2$ или $n = 4k + 3$. Двойственная функция имеет вид $f^* = f \oplus (n-1) \bigoplus_{i=1}^n x_i \oplus 1 \oplus \left(\binom{n}{2} \pmod{2} \right)$, поэтому f самодвойственна при $n = 4k + 3$. Окончательно имеем, что функция является шепферовой при $n = 4k + 2$. ►

Занятие № 1.7

ГРАФЫ: ИЗОМОРФИЗМ, СВЯЗНОСТЬ

VI.1.34(6.1, 6.2, 6.3). Среди пар графов, изображённых на рисунках, указать пары изоморфных и пары неизоморфных графов.

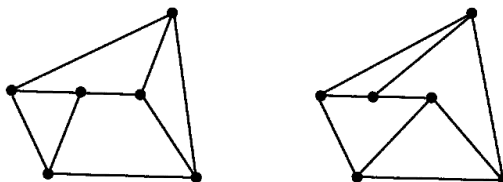


Рис. 6.1

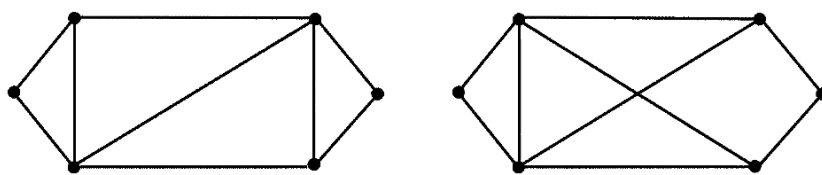


Рис. 6.2

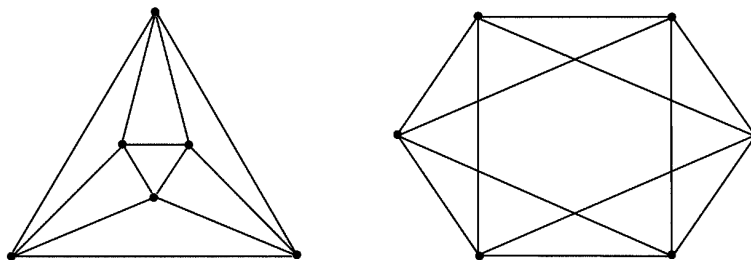
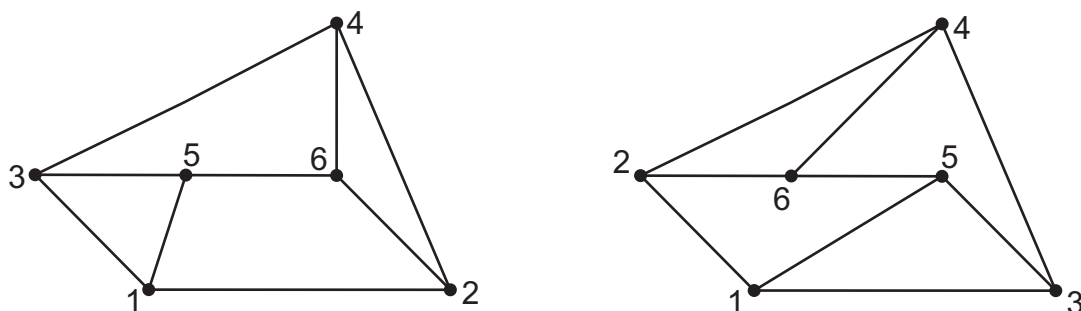


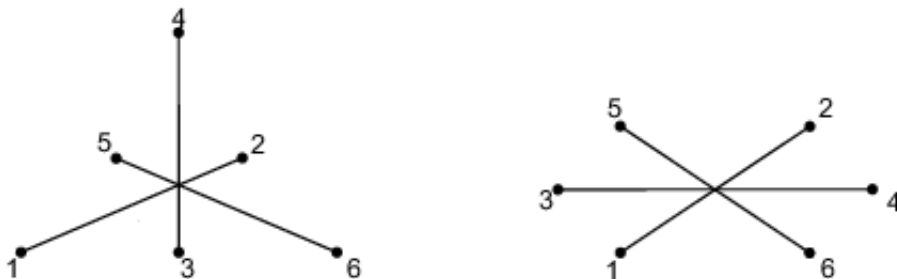
Рис. 6.3

◀ Для любой из пар графов нужно либо построить взаимно однозначное соответствие между вершинами и рёбрами, либо указать, почему два данных графа неизоморфны.

- Рис. 6.1. Строим взаимно однозначное соответствие так, как показано на рисунке.



- Рис. 6.2. Графы неизоморфны, так как в левом графе на рис. 6.2 вершины степени 4 смежны с двумя различными вершинами степени 2, а в правом графе на рис. 6.2 — с одной.
- Рис. 6.3. Рассмотрим дополнения этих графов (см. рисунок ниже). Нетрудно видеть, что дополнения графов изоморфны, поэтому изоморфны и сами графы.

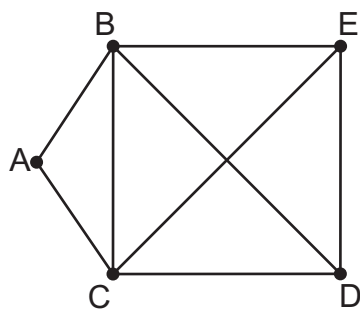


VI.1.2(1). Обозначим через $n_i(G)$ число вершин степени i в графе G . Построить все попарно неизоморфные графы без петель и кратных рёбер, у которых $n_2(G) = 1$, $n_3(G) = n_4(G) = 2$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

◀ Число вершин графа равно 5. Пусть q — число рёбер в графе.

$$\sum_{i=1}^n \deg v_i = 2q \Rightarrow q = 8.$$

В полном графе с n вершинами $n(n-1)/2$ рёбер, что при $n = 5$ составляет 10 рёбер. Следовательно, исходный граф может быть получен из полного удалением двух рёбер. Возможны два случая: существует вершина, инцидентная обоим удаляемым рёбрам, либо её не существует. Во втором случае невозможно получить из вершины степени 4 вершину степени 2. Следовательно, такой граф только один:

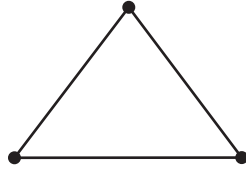


VI.1.13(1). Пусть $\delta(G)$ — наименьшая из степеней графа G , не имеющего петель и кратных рёбер и содержащего n вершин ($n \geq 2$). Доказать, что если $\delta(G) \geq (n-1)/2$, то граф связан.

◀ Пусть граф G не связан. Тогда в нем есть два множества вершин, между которыми нет рёбер. Выберем по одной вершине из каждого множества. По условию, степени этих вершин не меньше чем $\frac{n-1}{2}$. Следовательно, минимальное число вершин в таком графе равно $2 \cdot (\frac{n-1}{2} + 1) = n + 1$, что противоречит условию (в графе ровно n вершин). Значит, граф G связный. ▶

VI.1.12. Доказать, что в мультиграфе всякий замкнутый маршрут нечётной длины $l \geq 3$ содержит простой цикл. Справедливо ли аналогичное утверждение для маршрутов чётной длины?

◀ В мультиграфе замкнутый маршрут из трёх рёбер всегда является простым циклом:



Предположим, что для других натуральных l ($l = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) это не так. Значит, существует замкнутый маршрут наименьшей длины, не содержащий простых циклов:

$$v_0, \dots, v_i, v_k, \dots, v_i, \dots, v_0.$$

Тогда если длина маршрута $v_i, \dots, v_i$ чётная, то удалим из первоначального маршрута замкнутый маршрут

$$v_i, \dots, v_i,$$

иначе удалим маршрут

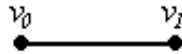
$$v_k, \dots, v_i.$$

В результате полученный маршрут будет иметь нечётную длину.

Если полученный маршрут не содержит простой цикл, то мы пришли к противоречию, поскольку изначально выбирался маршрут наименьшей длины.

Если же полученный маршрут содержит простой цикл, то мы также приходим к противоречию, так как, по предположению, исходный маршрут не содержит простых циклов. Следовательно, в мультиграфе всякий замкнутый маршрут нечётной длины $l \geq 3$ содержит простой цикл.

Для маршрутов чётной длины утверждение неверно. Например, маршрут v_0, v_1, v_0 для графа, изображённого ниже, не содержит простых циклов:



VI.1.22. Пусть у графа без петель и кратных рёбер n вершин и s компонент связности. Доказать, что число рёбер в нем не меньше $n - s$ и не превосходит $\frac{(n-s)(n-s+1)}{2}$. Вывести отсюда, что если у n -вершинного графа ($n \geq 2$) число рёбер больше $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, то он связный.

◀ Докажем, что для графа $G = (V, E)$ справедливо $|E| \geq n - s$. Обозначим через V_i , E_i число вершин и число рёбер в i -той компоненте связности графа G соответственно. Тогда

$$|E| = |E_1| + \dots + |E_s| \geq (|V_1| - 1) + \dots + (|V_s| - 1) = |V| - s = n - s.$$

Докажем верхнюю оценку числа рёбер. При фиксированном числе вершин, компонент связности и мощностях компонент связности максимальное число ребер достигается на графе, в котором каждая из компонент

связности является полным графом. Тогда при фиксированных n и s выясним, возможно ли при перенесении вершины из одной компоненты связности в другую каким-то образом увеличить число рёбер во всем графе.

Рассмотрим две компоненты связности s_l и s_m с l и m вершинами соответственно. Считая, что первоначально компоненты содержали максимальное число рёбер, то есть $\frac{l(l-1)}{2}$ и $\frac{m(m-1)}{2}$, перенесём из компоненты s_l в компоненту s_m одну вершину и посчитаем, насколько изменилось число рёбер в компонентах s_l и s_m .

Число изменится на величину $m - (l - 1)$, которая положительна при $m \geq l \geq 2$.

При $l = 1$ сократить число вершин в меньшей компоненте невозможно: это приведет к уменьшению числа компонент.

Таким образом, количество рёбер в графе максимально тогда и только тогда, когда $s - 1$ компонент связности состоят из одной вершины, а оставшаяся — из остальных вершин.

При этом число рёбер в графе

$$q = \frac{(n - (s - 1))(n - (s - 1) - 1)}{2} = \frac{(n - s)(n - s + 1)}{2}.$$

Последнее утверждение задачи доказывается от противного предположением, что граф не связан, то есть у него как минимум две компоненты связности. ►

VI.1.20(1). Граф (без петель и кратных рёбер) называется *самодополнительным*, если он изоморфен своему дополнению. Показать, что если граф самодополнительный, то число вершин в нем равно либо $4l$ ($l \geq 1$), либо $4l + 1$ ($l \geq 0$).

◀ Из изоморфности графа G своему дополнению $\overline{G}$ следует, что количества рёбер в них совпадают: $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$. Но по определению дополнения $|E_G| + |E_{\overline{G}}| = \frac{n(n-1)}{2}$ — число рёбер в полном графе на n вершинах. Чтобы число $\frac{n(n-1)}{4}$ рёбер в графе G было целым, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\begin{cases} n = 4l, & l \geq 1, \\ n = 4l + 1, & l \geq 0. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

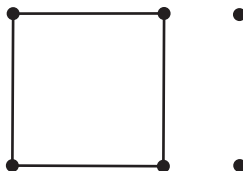
VI.1.21(1). Выяснить, сколько существует попарно неизоморфных графов без петель и кратных рёбер, имеющих 6 вершин и 11 рёбер.

◀ В полном графе с 6 вершинами число рёбер равно $\frac{6(6-1)}{2} = 15$, следовательно, в дополнении графа с одиннадцатью рёбрами будет $15 - 11 = 4$ ребра.

Рассмотрим все попарно неизоморфные графы с шестью вершинами и четырьмя рёбрами. Их количество будет совпадать с искомым.

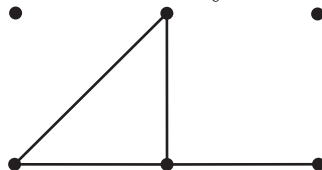
(1) Рассмотрим графы, содержащие циклы:

(a) цикл из четырёх рёбер;

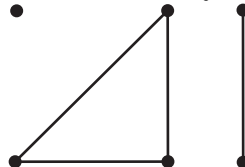


(b) цикл из трёх рёбер; тогда четвертое ребро

— либо входит в ту же компоненту связности, что и цикл;



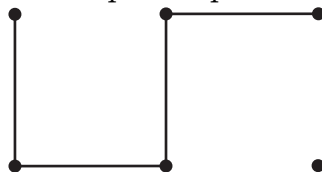
— либо образует вторую компоненту.



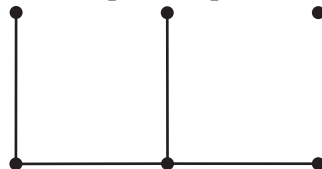
(2) Рассмотрим ациклические графы. Ациклический связный граф, состоящий из 6 вершин и 4 рёбер, имеет 2 компоненты связности.

(a) В одной компоненте связности 5 вершин, в другой — 1. Таких графов несколько:

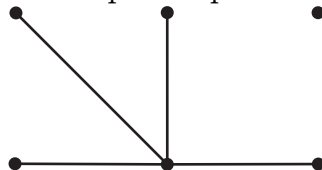
— максимальная степень вершин равна 2;



— максимальная степень вершин равна 3;



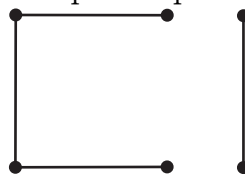
— максимальная степень вершин равна 4.



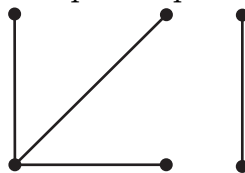
(b) В одной компоненте связности 4 вершины, в другой — 2.

Возможны два варианта:

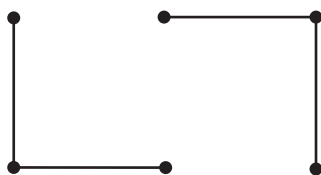
— максимальная степень вершин равна 2;



— максимальная степень вершин равна 3.



(с) В каждой из компонент связности по 3 вершины.



Других вариантов нет. Всего мы получили 9 попарно неизоморфных графов.

Занятие № 1.8

ГРАФЫ: ДЕРЕВЬЯ, ГОМЕОМОРФИЗМ

VI.1.26. Доказать, что во всяком дереве с $n \geq 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.

◀ Пусть у дерева p вершин, q рёбер и p_0 висячих вершин. $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$ для любого графа. Кроме того, для любого дерева выполнено равенство $p - q = 1$. Таким образом,

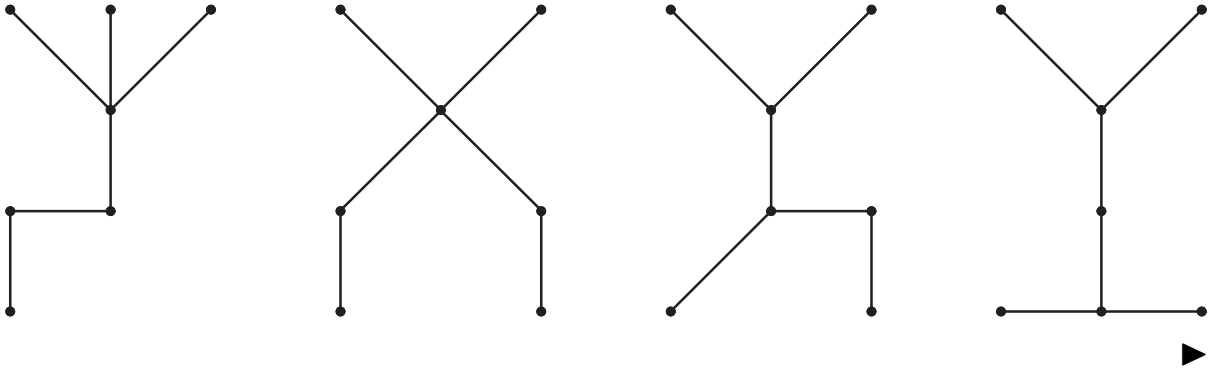
$$2q = \sum_{i=1}^p \deg v_i = p_0 + \sum_{\deg v_i > 1} \deg v_i \geq p_0 + 2(p - p_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 \geq 2(p - q) = 2.$$



VI.1.29(2). Изобразить все попарно неизоморфные деревья с 6 рёбрами и 4 висячими вершинами.

◀ В дереве, удовлетворяющем условию, есть либо одна вершина степени 4, либо две вершины степени 3.



VI.3.1(в). Построить код плоского корневого дерева, изображённого на рис. 1.

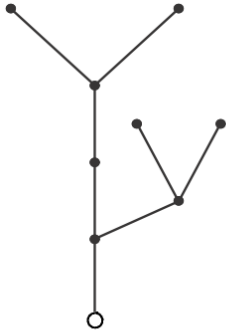


Рис. 1

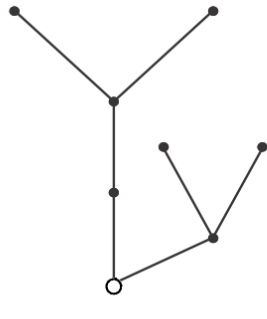


Рис. 2

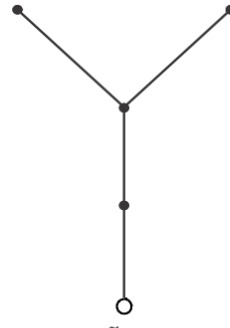


Рис. 3

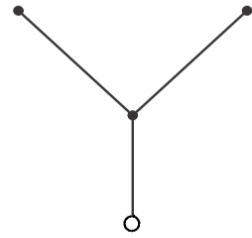


Рис. 4

◀ **1-й способ.** По определению код искомого дерева $\mathcal{D}$ равен $0\tilde{\alpha}_1 1$, где $\tilde{\alpha}_1$ — код его поддерева $\mathcal{D}_1$. Код $\mathcal{D}_1$ по определению равен $\tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3$, где $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_3$ — коды его левого и правого поддеревьев. Аналогично получим $\tilde{\alpha}_2 = 0\tilde{\alpha}_3 1$. Код $\tilde{\alpha}_3$ из определения вычисляется без труда: $\tilde{\alpha}_3 = 001011$. Поэтому код дерева $\mathcal{D}$ равен

$$\tilde{\alpha} = 0\tilde{\alpha}_1 1 = 0\tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3 1 = 00\tilde{\alpha}_3 1\tilde{\alpha}_3 1 = 0000101110010111.$$

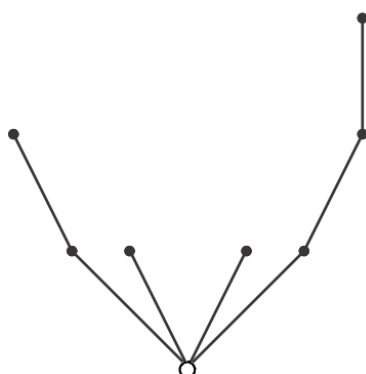
2-й способ. Так как код дерева можно получить с помощью обхода (учитывая, что рёбра укладки дерева, инцидентные корню, пронумерованы по часовой стрелке), сразу получаем искомый код:

$$\tilde{\alpha} = 0000101110010111.$$

VI.3.2(2). Построить плоское корневое дерево по его коду:

$$\tilde{\alpha} = 00110101000111.$$

◀ Представим искомый код в виде $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \tilde{\alpha}_3 \tilde{\alpha}_4$, где $\tilde{\alpha}_1 = 0011$, $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = 01$, $\tilde{\alpha}_4 = 000111$ — коды поддеревьев дерева с кодом $\tilde{\alpha}$. Учитывая, что $\tilde{\alpha}_1 = 0\tilde{\alpha}_2 1$, $\tilde{\alpha}_4 = 0\tilde{\alpha}_1 1$, строим данное дерево:



VI.1.36(1). Выяснить, существуют ли в графах, изображённых на рис. 1–3, подграфы, гомеоморфные K_4 (рис. 4).

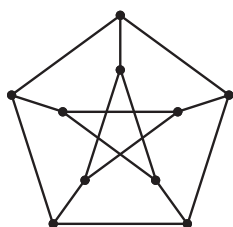


Рис.1

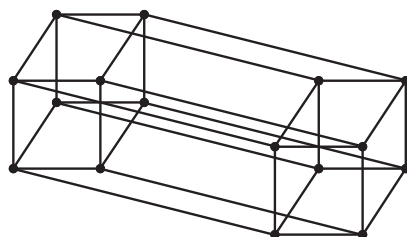


Рис.2

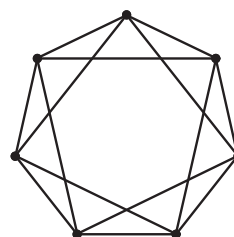


Рис.3

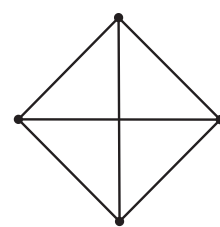


Рис.4

◀ Да, существуют (см. рис. 5, 6, 7).

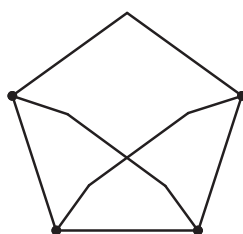


Рис.5

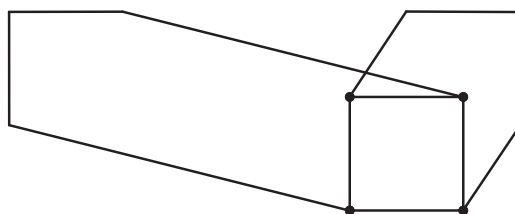


Рис.6

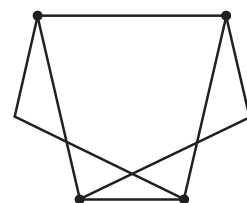


Рис.7



Занятие № 1.9

ГРАФЫ: ПЛАНАРНОСТЬ, РАСКРАСКИ, ОРГРАФЫ

VI.2.1(2). Применяя критерий Понтрягина-Куратовского, выяснить, планарны ли изображённые на рис. 1–3 графы.

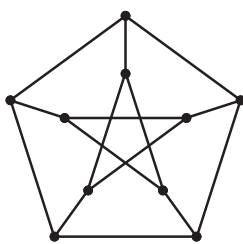


Рис.1

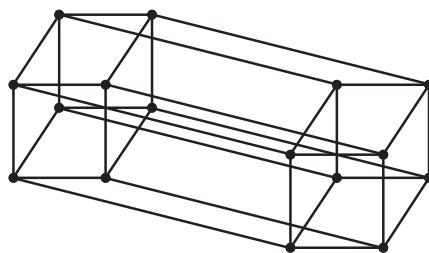


Рис.2

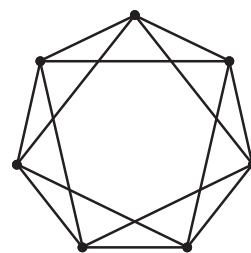


Рис.3

◀ В каждом из этих графов существует подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (см. рис. 4, 5, 6), поэтому по критерию Понтрягина-Куратовского они не являются планарными.

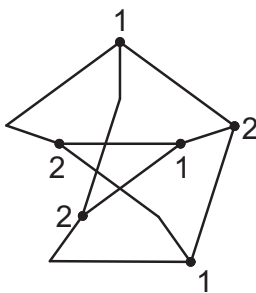


Рис.4

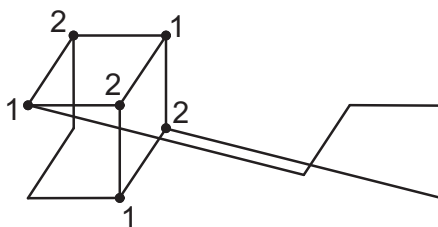


Рис.5

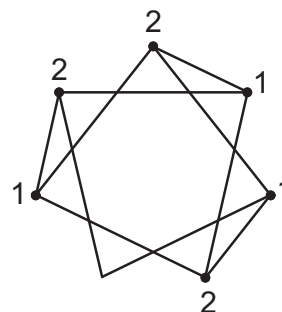


Рис.6



VI.2.13. Плоский связный граф без висячих вершин, каждая грань которого, включая и внешнюю, ограничена циклом длины 3, называется *триангуляцией*. Показать, что триангуляция с $n \geq 3$ вершинами имеет $3n - 6$ рёбер и $2n - 4$ граней.

◀ Пусть триангуляция с n вершинами имеет m рёбер и f граней, тогда, поскольку каждой грани триангуляции по условию принадлежит ровно 3 ребра, а каждое ребро принадлежит ровно 2 различным граням, имеем $m = 3f/2$. Далее, по формуле Эйлера

$$\begin{aligned} n - m + f &= 2 \Rightarrow n - 3f/2 + f = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f = 2n - 4, m = 3n - 6. \end{aligned}$$



VI.2.17(1). Показать, что плоский кубический граф, граница каждой грани которого имеет не менее 5 вершин, содержит по крайней мере 20 вершин. Привести пример такого графа.

◀ Так как граф кубический, то степень каждой вершины равна 3, следовательно, количество рёбер в графе $m = 3n/2$ (так как каждому ребру принадлежат ровно 2 вершины). Поскольку по условию каждой грани

принадлежит не менее 5 вершин, количество граней в графе $f \leq 3n/5$. Из формулы Эйлера $n - m + f = 2$ получаем

$$2 \leq n - 3n/2 + 3n/5,$$

откуда $n \geq 20$. Отметим, что примером удовлетворяющего условию графа может служить центральная проекция на плоскость правильного двенадцатигранника (додекаэдра). ►

VI.2.18. Найти хроматические числа и хроматические индексы графов, изображённых на рис. 1–6.

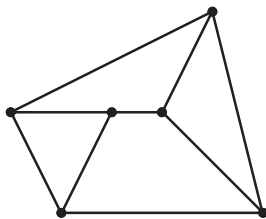


Рис.1

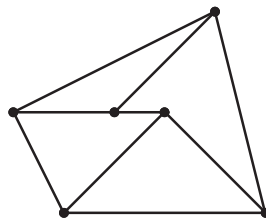


Рис.2

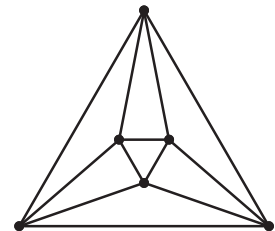


Рис.3

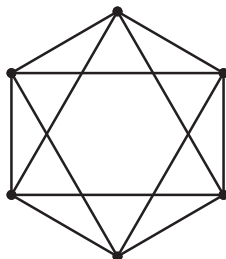


Рис.4

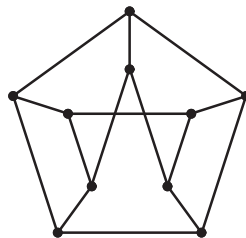


Рис.5

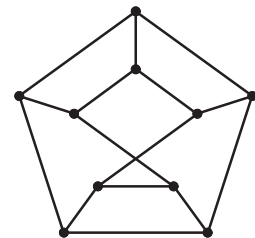


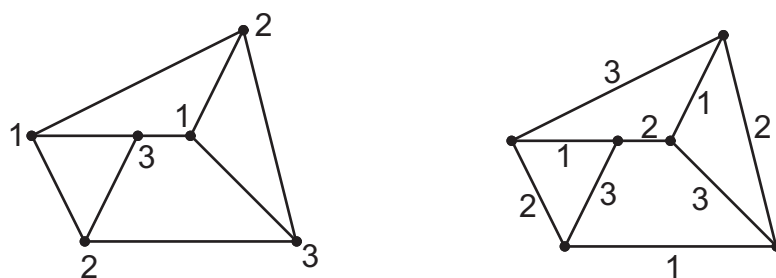
Рис.6

◀ Все шесть графов имеют циклы нечетной длины. Поэтому их хроматические числа не меньше трех. Заметим, что граф, изображённый на рис. 1, изоморфен графу, изображённому на рис. 2, а граф, изображённый на рис. 3, изоморфен графу, изображённому на рис. 4, поэтому их хроматические индексы и хроматические числа совпадают.

Легко проверить, что $\chi(G) \geq \omega(G)$, где $\omega(G)$ — число вершин наибольшего полного подграфа G ; а $\chi'(G) \geq \max_{v \in G} \deg v$.

Найдем $\chi(G)$ и $\chi'(G)$ для графов на рис. 1, 3, 5, 6.

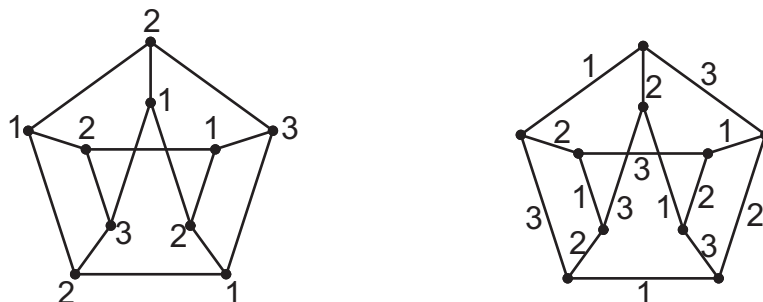
Для графа на рис. 1 $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 3$.



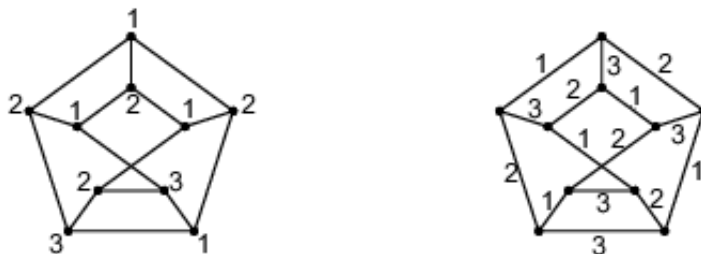
Для графа на рис. 3 $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 4$.



Для графа на рис. 5 $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 3$.



Для графа на рис. 6 $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 3$.

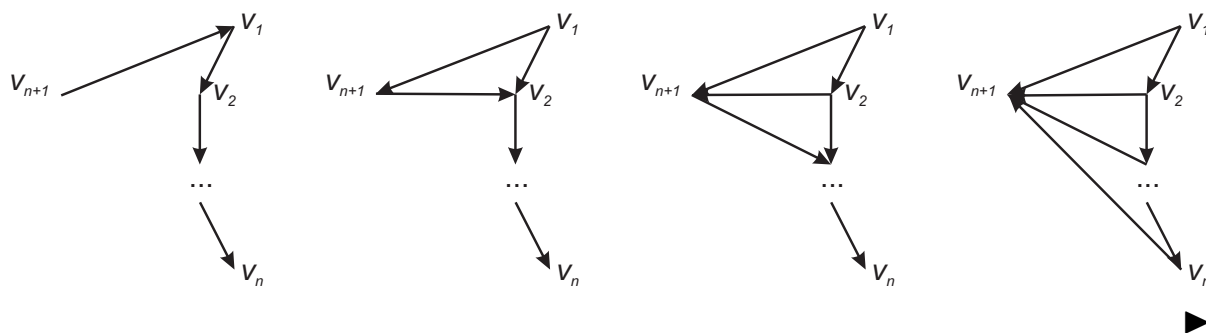


VI.1.54. *Бесконтурным* ориентированным мультиграфом называется мультиграф, не содержащий *контуров* (ориентированных простых циклов). Доказать, что в бесконтурном ориентированном мультиграфе существует вершина с нулевой полустепенью исхода.

◀ Начнём движение из любой вершины и на очередном шаге в качестве следующей будем выбирать любую вершину, в которую ведёт дуга из текущей. Так как граф бесконтурный, то на каждом шаге мы будем попадать в непосещённую ранее вершину. С другой стороны, множество вершин графа конечно, поэтому рано или поздно мы придем в вершину, полустепень исхода которой равна 0. ▶

VI.1.60. Турниром называется полный направленный граф. Гамильтоновой цепью называется ориентированная простая цепь, включающая все вершины графа. Показать, что в любом турнире существует гамильтонова цепь.

◀ Докажем утверждение методом математической индукции. Для турнира с $n = 1$ вершиной утверждение верно. Далее, пусть оно верно для некоторого турнира G_n с n вершинами. Добавим к нему еще одну вершину v_{n+1} с дугами и получим новый турнир G_{n+1} . Пусть $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ — гамильтонова цепь в турнире G_n . Если в турнире G_{n+1} есть дуга $v_{n+1} \rightarrow v_1$, то в нем есть путь $v_{n+1} \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. Если в турнире G_{n+1} есть дуга $v_i \rightarrow v_{n+1}$ и $v_{n+1} \rightarrow v_{i+1}$, то в нем есть путь $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_i \rightarrow v_{n+1} \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. Иначе есть путь $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_{n+1}$. В каждом из трёх случаев в турнире G_{n+1} есть гамильтонова цепь.



Занятие № 1.10

АЛФАВИТНОЕ КОДИРОВАНИЕ. ОПТИМАЛЬНЫЕ КОДЫ

VII.1.3(1). Выяснить, является ли слово $P = 10120121012100$ в алфавите $\{0, 1, 2\}$ кодом сообщения в кодировании, задаваемом схемой

$$\Sigma: \begin{cases} 1 \rightarrow 10, \\ 2 \rightarrow 12, \\ 3 \rightarrow 012, \\ 4 \rightarrow 101, \\ 5 \rightarrow 2100. \end{cases}$$

Если да, то выяснить, является ли P кодом ровно одного сообщения.

◀ Слово P является кодом единственного сообщения, поскольку

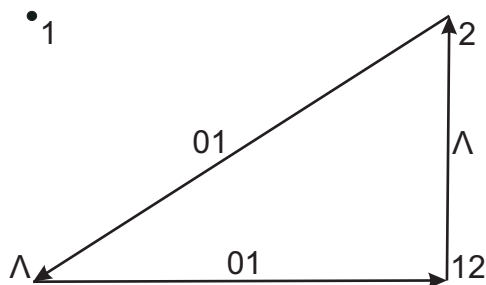
- единственное кодовое слово, оканчивающееся двумя нулями, — это 2100, значит, $P = 1012012101 \underbrace{2100}$;
- единственное кодовое слово, оканчивающееся единицей, — 101, следовательно, $P = 1012012 \underbrace{101} \underbrace{2100}$;
- предположим, первое кодовое слово — 101. В этом случае оставшаяся часть слова не декодируется: $P = \underbrace{101} \underbrace{2012} \underbrace{101} \underbrace{2100}$. Следовательно, первое кодовое слово — 10, далее — 12 и 012:
 $P = \underbrace{10} \underbrace{12} \underbrace{012} \underbrace{101} \underbrace{2100}$.

Итак, P является кодом единственного сообщения 12345. ▶

VII.1.2(1, 3). Выяснить, является ли код C с кодирующим алфавитом $\{0, 1, 2\}$ однозначно декодируемым:

- 1) $C = \{01, 201, 112, 122, 0112\}$;
- 3) $C = \{0, 01, 0010001001\}$.

◀ 1) Пусть кодирование задается схемой Σ . Начнём строить граф G_Σ :



Существует контур, проходящий через вершину Λ . При обходе контура получим слово, декодируемое неоднозначно:

$$\underbrace{0 \ 1} \underbrace{1 \ 2} \underbrace{2 \ 0 \ 1}.$$

- 3) Слово $\overbrace{0 \ 01 \ 0 \ 0 \ 01 \ 0 \ 01}$ декодируется неоднозначно. Значит, весь код не является однозначно декодируемым. ►

VII.1.6(1, 3). Построить двоичный префиксный код C с заданной последовательностью L длин кодовых слов:

- 1) $L = (1, 2, 3, 3)$;
- 3) $L = (2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$.

◀ Построим двоичные префиксные коды в алфавите $\{a, b\}$.

- 1) Пусть слово длины 1 — a . Тогда a не должно быть префиксом никакого другого слова. Пусть слово длины 2 — ba ; ba в этом случае также не может быть префиксом никакого другого слова. Далее рассуждаем аналогично. В результате код может быть, например, таким:

$$C = \{a, ba, bba, bbb\}.$$

Возможны и другие варианты, например:

$$C = \{a, bb, baa, bab\}.$$

- 3) Рассуждаем точно так же, как в предыдущем пункте. Результат может быть таким:

$$C = \{aa, bb, aba, abb, baaa, baab, baba, babb\}. \quad \blacktriangleright$$

VII.1.7(1, 4). С помощью неравенства Макмиллана выяснить, может ли набор чисел L быть набором длин кодовых слов однозначно декодируемого кода в q -значном алфавите:

- 1) $L = (1, 2, 2, 3)$, $q = 2$;
- 4) $L = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$, $q = 3$.

◀ Неравенство Макмиллана выглядит так:

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{q^{l_i}} \leq 1,$$

где q — количество букв в кодирующем алфавите, $l_1, l_2, \dots, l_r$ — длины кодовых слов однозначно декодируемого кода.

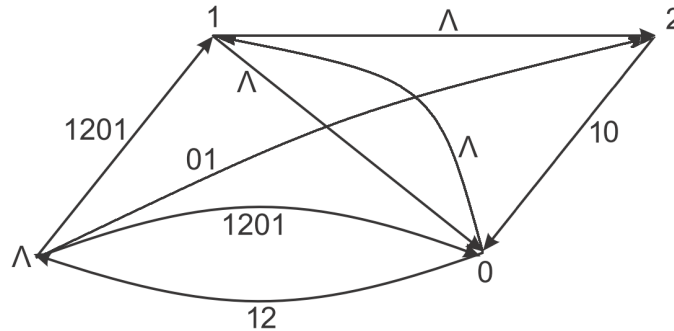
Подставляя в эту формулу числа, получаем:

- 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} > 1$, значит, набор чисел $L = (1, 2, 2, 3)$ не может быть набором длин кодовых слов однозначно декодируемого кода в 2-значном алфавите;
- 4) $\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{22}{27} < 1$, значит, набор чисел $L = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$ может быть набором длин кодовых слов однозначно декодируемого кода в 3-значном алфавите. ►

VII.1.5(1, 2). Для кода C найти слово минимальной длины, декодируемое неоднозначно:

- 1) $C = \{10, 01, 12, 012, 2100, 12011, 12010\}$;
- 2) $C = \{0, 101010, 01010101\}$.

◀ 1) Пусть кодирование задается схемой Σ . Построим граф G_Σ :



Выпишем слова, приписанные вершинам и дугам различных контуров, проходящих через вершину Λ : 12011012, 01210012, 1201012. Из них минимальную длину имеет слово

$$\underbrace{1\ 2\ 0\ 1}_{} \underbrace{0\ 1\ 2}_{}.$$

- 2) Наименьшее общее кратное 6 и 8 — 24. Значит, для того, чтобы быть неоднозначно декодируемым, слово должно содержать 4 кодовых слова 101010 и одновременно 3 кодовых слова 01010101. Легко заметить, что искомым словом минимальной длины является

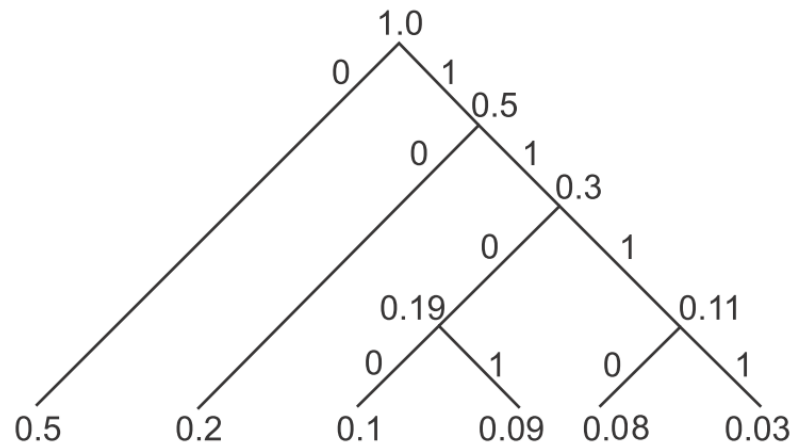
$$\underbrace{0\ 1010101}_{} \underbrace{01010101}_{} \underbrace{01010101}_{} \underbrace{01010101}_{} \underbrace{0}_{}.$$

►

VII.2.1(4, 6). С помощью процедуры Хаффмена построить двоичный код с минимальной избыточностью для набора вероятностей P :

- 4) $P = (0.5, 0.2, 0.1, 0.09, 0.08, 0.03)$;
- 6) $P = (0.3, 0.3, 0.2, 0.04, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.01)$.

◀ 4) $P = (0.5, 0.2, 0.1, 0.09, 0.08, 0.03)$. Построим дерево кода C :

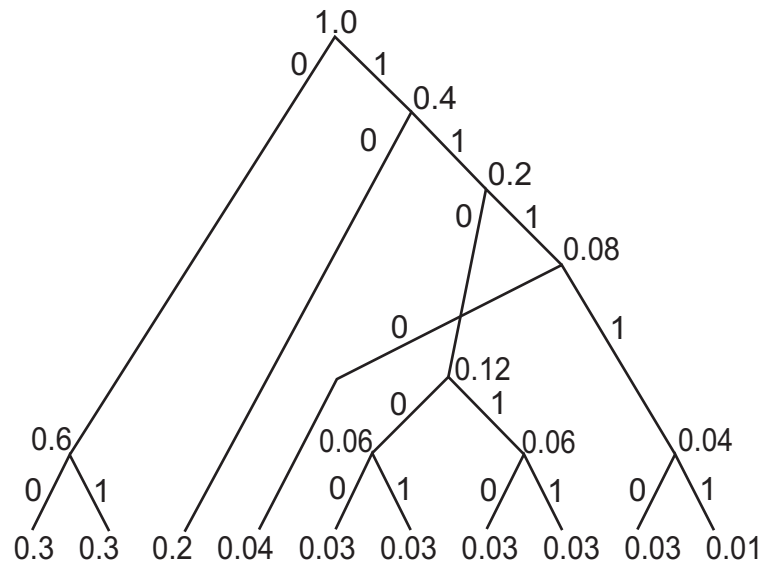


Спускаясь от корня к вершинам, получим кодовые слова, соответствующие указанным вероятностям:

$$C = \{0, 10, 1100, 1101, 1110, 1111\}.$$

6) $P = (0.3, 0.3, 0.2, 0.04, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.01)$.

Построим дерево кода C :



Спускаясь от корня к вершинам, получим кодовые слова, соответствующие указанным вероятностям:

$$C = \{00, 01, 10, 1110, 11000, 11001, 11010, 11011, 11110, 11111\}. \quad \blacktriangleright$$

VII.2.10(4, 5, 10). Выяснить, существует ли двоичный код с минимальной избыточностью, обладающий заданной последовательностью L длин кодовых слов:

- 4) $L = (1, 2, 3, 4)$;
- 5) $L = (1, 2, 3, 4, 4)$;
- 10) $L = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

◀ Двоичный код с минимальной избыточностью и заданным набором длин кодовых слов существует в том и только том случае, когда неравенство Макмиллана выполнено как равенство:

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{2^{l_i}} = 1.$$

- 4) Нет, так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} < 1$.
 5) Да, так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} = 1$.
 10) Нет, так как $6 \cdot \frac{1}{8} < 1$. ▶

Занятие № 1.11

КОДЫ, ИСПРАВЛЯЮЩИЕ ОШИБКИ

VII.3.17.

- 1) Показать, что код исправляет t ошибок тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя кодовыми словами не меньше $2t + 1$.
 - 2) Показать, что код обнаруживает t ошибок тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя кодовыми словами не меньше $t + 1$.
- ◀ 1) Код C исправляет t ошибок тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя кодовыми словами не меньше $2t + 1$.
 Это условие эквивалентно тому, что расстояние между центрами шаров радиуса t (кодовыми словами) не меньше, чем $2t + 1$, что эквивалентно тому, что эти шары не пересекаются. Таким образом, на выходе получится слово, принадлежащее единственному однозначно определённом шару (если в слове не более t ошибок), что позволяет точно восстановить слово, так как известен центр этого шара.
- 2) Код обнаруживает t ошибок тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя кодовыми словами не меньше $t + 1$.
 Это условие эквивалентно тому, что ни один из центров шаров (кодовое слово) не содержится в каком-либо другом шаре, то есть если произошло не более t ошибок, можно в точности установить, что полученное на выходе слово не совпадает с центром ни одного из шаров. ▶

VII.3.20(1, 2). Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *характеристической* для подмножества $C \subseteq B^n$, если $C = N_f$.

Определить, сколько ошибок обнаруживает и сколько исправляет код с характеристической функцией f :

- 1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$;
- 2) $f(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

◀ 1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$.

Кодовое расстояние равно 2, так как на соседних наборах функция принимает различные значения.

Код обнаруживает 1 ошибку и исправляет 0 ошибок.

- 2) $f(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \dots \cdot \bar{x}_n \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

$N_f = C = \{(00 \dots 0), (11 \dots 1)\}$.

Кодовое расстояние равно $\rho((00 \dots 0), (11 \dots 1)) = n$.

Код обнаруживает $n - 1$ ошибку и исправляет $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ошибок. ▶

VII.3.27. Показать, что мощность плотно упакованного $\langle n, 2t + 1 \rangle$ -кода равна

$$\frac{2^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}}.$$

◀ $\langle n, 2t + 1 \rangle$ -код $C = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k\}$ плотно упакован, поэтому справедливо:

- 1) $\forall i \neq j \quad S_t^n(\tilde{\alpha}_i) \cap S_t^n(\tilde{\alpha}_j) = \emptyset$;
- 2) $\forall \tilde{\beta} \in B^n \quad \exists \tilde{\alpha} \in C: \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leq t$.

Весь булев куб B^n разбивается на непересекающиеся шары радиуса t с центрами в кодовых словах. Посчитаем мощность шара $S_t^n(\tilde{\alpha})$. Число наборов $\tilde{\beta}$, отличающихся от $\tilde{\alpha}$ в i позициях, равно $\binom{n}{i}$. Значит, мощность всего шара равна $\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$.

Разделив мощность булева куба на мощность шара, получим число кодовых слов, то есть искомую мощность кода. ▶

VII.4.9. Доказать, что кодовое расстояние линейного кода C равно минимальному весу ненулевого кодового слова.

◀ Пусть минимальный вес ненулевого кодового слова $\tilde{\alpha}$ равен d : $\|\tilde{\alpha}\| = d$. Предположим, что кодовое расстояние s линейного кода C меньше d . Тогда $\exists \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in C: \rho(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = s$. Но по определению линейного кода $\tilde{\alpha}_1 \oplus \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_0 \in C$, причем $\|\tilde{\alpha}_0\| = s < d$ — противоречие. Значит, кодовое расстояние $s \geq d$.

Поскольку $\tilde{0} \in C$ для любого линейного кода, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{0}) = d$. Значит, кодовое расстояние s линейного кода C в точности совпадает с d — минимальным весом ненулевого кодового слова. ►

VII.4.7(г).

1) По матрице $H = \begin{pmatrix} 11001 \\ 10101 \\ 01110 \end{pmatrix}$ найти кодовое расстояние $d(C(H))$

кода $C(H)$, порожденного матрицей H .

2) Построить проверочную матрицу H^* для кода $C(H)$, порожденного матрицей H .

◀ 1) Обозначим $\tilde{\alpha}_1 = (11001)$, $\tilde{\alpha}_2 = (10101)$, $\tilde{\alpha}_3 = (01110)$. Заметим, что $\tilde{\alpha}_1 \oplus \tilde{\alpha}_2 \oplus \tilde{\alpha}_3 = (00010)$, поэтому, согласно утверждению задачи VII.4.9, $d(C(H)) = 1$.

2) В проверочной матрице должно быть $5 - 3 = 2$ строки $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$:

$$\bigoplus_{k=1}^5 \tilde{\alpha}_i^k \& \tilde{\beta}_j^k = 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2.$$

Выполним элементарные преобразования строк матрицы H :

$$\begin{pmatrix} 11001 \\ 10101 \\ 01110 \end{pmatrix} \longrightarrow \{\text{прибавим ко 2-й строке 1-ю}\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 11001 \\ 01100 \\ 01110 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \{\text{прибавим к 3-й строке 2-ю}\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 11001 \\ 01100 \\ 00010 \end{pmatrix}.$$

Проверочная матрица может иметь, например, такой вид:

$$H^* = \begin{pmatrix} 11100 \\ 10001 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

VII.3.21(5). Построить по методу Хэмминга кодовое слово для сообщения $\tilde{\alpha} = 10101011$.

◀ Для сообщения $\tilde{\alpha} = 10101011$ имеем:

$$m = 8,$$

$$n = \min\{l: 2^8 \leq \frac{2^l}{l+1}\} = 12.$$

Кодовое слово $\tilde{\beta}$ имеет вид:

$$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7\beta_8\beta_9\beta_{10}\beta_{11}\beta_{12} = \beta_1\beta_21\beta_4010\beta_81011,$$

где

$$\beta_1 = \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7 \oplus \beta_9 \oplus \beta_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

$$\beta_2 = \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 \oplus \beta_{10} \oplus \beta_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$$

$$\beta_4 = \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 \oplus \beta_{12} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

$$\beta_8 = \beta_9 \oplus \beta_{10} \oplus \beta_{11} \oplus \beta_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

Откуда $\tilde{\beta} = 111001011011$. ►

VII.3.22(8). По каналу связи передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга для сообщения $\tilde{\alpha}$. После передачи по каналу связи, искажающему слово не более чем в одном разряде, было получено слово $\tilde{\beta} = 11011100110$. Восстановить исходное сообщение.

◀ $n = 11$,

$$m = \left\lceil \log_2 \frac{2^{11}}{12} \right\rceil = [9 - \log_2 3] = 7,$$

$$k = n - m = 4,$$

$$\tilde{\beta} = 11011100110 = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7\beta_8\beta_9\beta_{10}\beta_{11}.$$

Получим вектор $\mathbf{v} = (v_3v_2v_1v_0)$:

$$v_0 = \beta_1 \oplus \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7 \oplus \beta_9 \oplus \beta_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$$

$$v_1 = \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 \oplus \beta_{10} \oplus \beta_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$$

$$v_2 = \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$$

$$v_3 = \beta_8 \oplus \beta_9 \oplus \beta_{10} \oplus \beta_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0.$$

Получаем, $\mathbf{v} = (0111)$ и $(0111)_2 = 7_{10}$ — ошибка в седьмом разряде.

Неискажённый кодовый вектор имеет вид: $\tilde{\beta}' = 11011110110$. Вычеркивая проверочные разряды (1-й, 2-й, 4-й и 8-й), получаем исходное сообщение: $\tilde{\alpha} = 0111110$. ►

Занятие № 1.12

АВТОМАТЫ. ЧАСТЬ 1

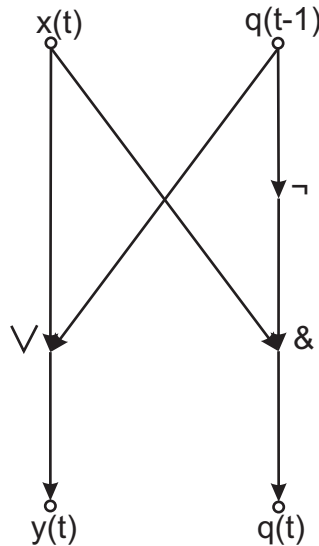
IV.2.13(1). Для функции f из $P_{2,\text{од}}^{1,1}$ построить схему над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и функциональных элементов «дизъюнкция», «конъюнкция» и «отрицание»:

$$f: \begin{cases} y(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x(t) \& \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 1. \end{cases}$$

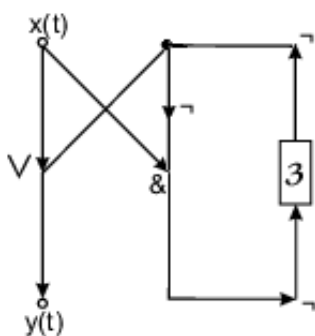
◀ Сначала построим схему из функциональных элементов над множеством, состоящим из дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, для следующей совокупности булевых функций:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x(t) \& \bar{q}(t-1). \end{cases}$$

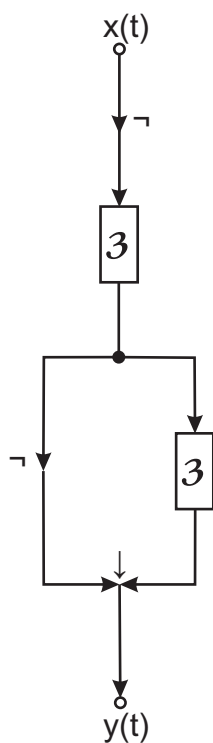
Такая схема из функциональных элементов будет состоять из двух входных каналов (по переменным $x(t)$, $q(t-1)$) и двух выходных (по переменным $y(t)$, $q(t)$):



Теперь замкнём выходной канал по переменной $q(t)$ на входной канал $q(t-1)$. Так как $q(0) = 1$, то после элемента единичной задержки необходимо поставить элемент, реализующий отрицание. А для того, чтобы при прохождении элемента единичной задержки не потерять значение $q(t)$, перед элементом единичной задержки также поставим элемент, реализующий отрицание:



IV.2.14(3). По схеме, реализующей функцию f из $\widehat{P}_{2, \text{од}}^{1,1}$, построить канонические уравнения, каноническую таблицу и диаграмму Мура:



◀ Пусть верхний элемент задержки соответствует состоянию q_1 , а нижний — q_2 .

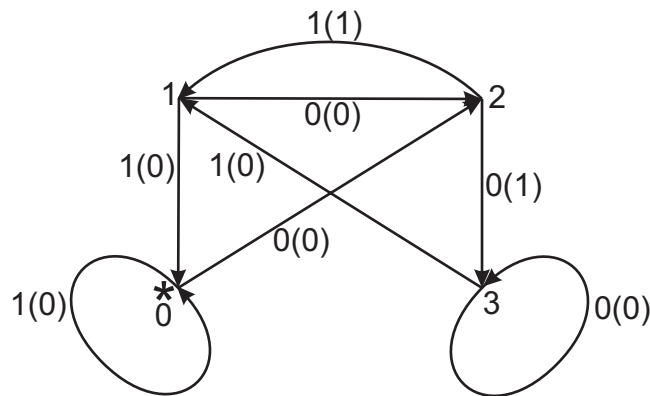
Канонические уравнения данной функции имеют вид:

$$f: \begin{cases} y(t) = \overline{q_1}(t-1) \downarrow q_2(t-1), \\ q_1(t) = \overline{x}(t), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

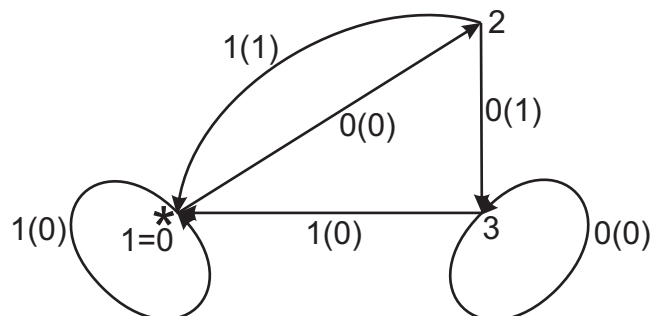
Строим каноническую таблицу:

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1

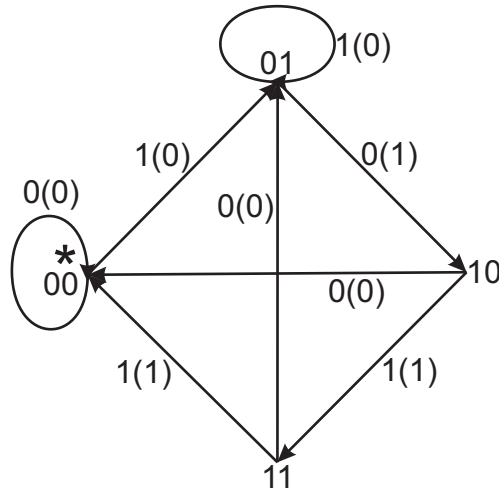
По канонической таблице восстанавливаем диаграмму Мура:



Заметим, что в ней состояния 0 и 1 эквивалентны, и их можно объединить:



IV.2.13(9). Для функции f из $P_{2,\text{од}}^{1,1}$ построить схему над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и функциональных элементов «дизъюнкция», «конъюнкция» и «отрицание». f задается диаграммой Мура:



◀ По заданной диаграмме Мура построим каноническую таблицу:

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

По канонической таблице выпишем канонические уравнения. Для этого построим ДНФ для каждой из функций $y(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ (для сокращения записи вместо $x(t)$, $q_1(t-1)$, $q_2(t-1)$ будем писать x , q_1 , q_2).

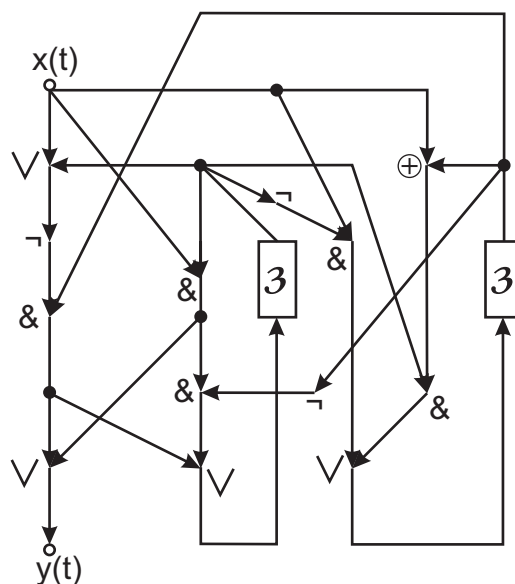
$$\begin{cases} y(t) = \bar{x} \& \bar{q}_1 \& q_2 \vee x \& q_1 = \bar{x} \vee \bar{q}_1 \& q_2 \vee x \& q_1, \\ q_1(t) = \bar{x} \& \bar{q}_1 \& q_2 \vee x \& q_1 \& \bar{q}_2, \\ q_2(t) = \bar{x} \& q_1 \& q_2 \vee x \& \bar{q}_1 \vee x \& q_1 \& \bar{q}_2, \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Для упрощения восприятия схемы используем не только функциональные элементы «дизъюнкция», «конъюнкция» и «отрицание», но и сложение по модулю 2.

Заметим, что

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \bar{x} \& q_1 \& q_2 \vee x \& \bar{q}_1 \vee x \& q_1 \& \bar{q}_2 = \\ &= q_1 \& (x \oplus q_2) \vee x \& \bar{q}_1. \end{aligned}$$

Строим схему:



Занятие № 1.13

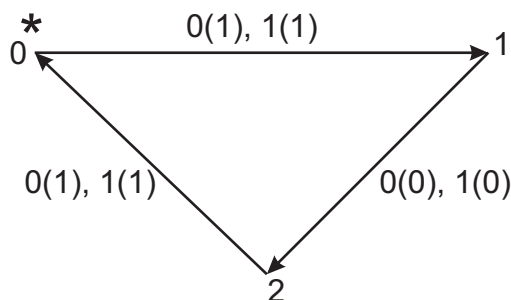
АВТОМАТЫ. ЧАСТЬ 2

IV.2.1(24). Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для функции $f(\tilde{x}^\omega) = y(1)y(2) \dots y(t) \dots$ из $P_{2, \text{од}}^{1,1}$, где $y(t)$ есть t -я цифра после запятой в двоичном разложении числа $\frac{5}{7}$.

◀ Для решения задачи необходимо, прежде всего, найти двоичное разложение числа $\frac{5}{7}$ (например, поделив числа в столбик в двоичной системе счисления):

$$\left(\frac{5}{7}\right)_{10} = \left(\frac{101}{111}\right)_2 = (0, (101))_2.$$

Очевидно, что в диаграмме будет 3 состояния, и функция будет *автономной* (то есть не зависящей от входных данных).



По диаграмме Мура восстанавливаем каноническую таблицу (доопределённые ячейки выделены):

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

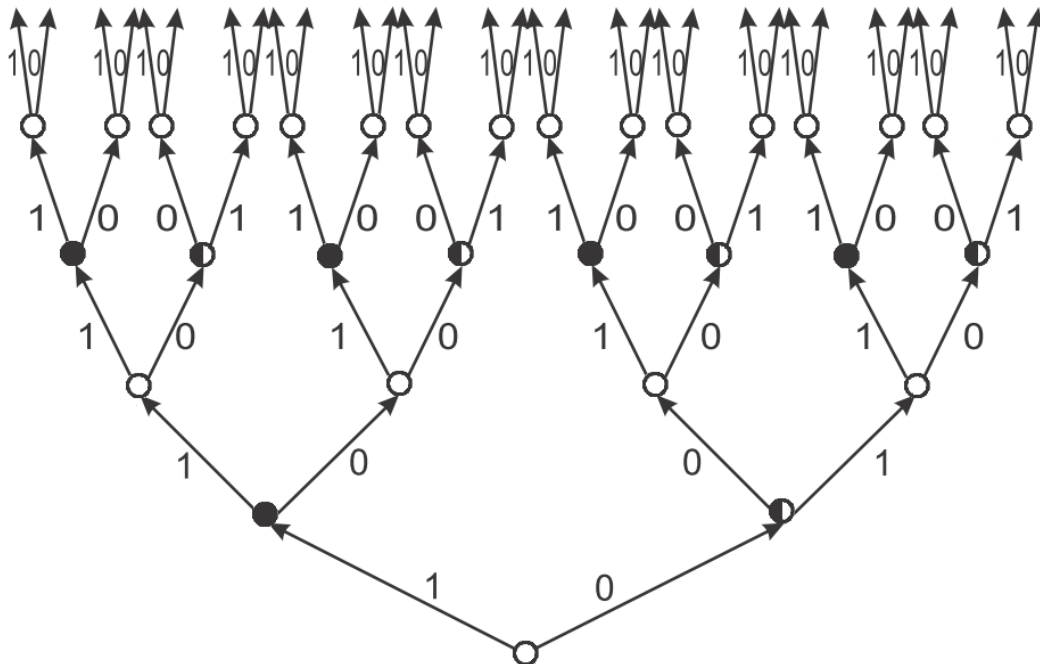
Затем по канонической таблице выписываем канонические уравнения:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = q_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t) \sim q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \quad \blacktriangleright \end{cases}$$

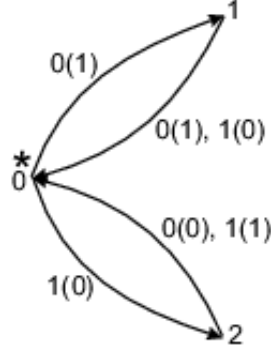
IV.2.1(16). Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для функции $f(\tilde{x}^\omega) = y(1)y(2)\dots y(t)\dots$ из $P_{2,\text{од}}^{1,1}$, где

$$y(t) = \begin{cases} \bar{x}(t), & \text{если } t \text{ нечётное,} \\ x(t) \oplus y(t-1), & \text{если } t \text{ чётное.} \end{cases}$$

◀ Используя описанную в условии формулу, восстановим информационное дерево. Для нахождения веса функции хватит пяти ярусов. Изучив дерево, видим, что вес функции равен 3.



По информационному дереву строим диаграмму Мура:



По диаграмме Мура выписываем каноническую таблицу, доопределяя необходимые значения:

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

Затем по канонической таблице восстанавливаем канонические уравнения.

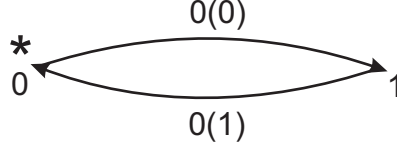
$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t) \& \bar{q}_1(t-1) \vee x(t) \& q_1(t-1) \& \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \& q_2(t-1) \vee x(t) \& \bar{q}_1(t-1) \& \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{x}(t) \& \bar{q}_1(t-1) \& \bar{q}_2(t-1) \vee q_1(t-1) \& q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \quad \blacktriangleright \end{cases}$$

IV.2.5(1). Для частично определённой детерминированной функции $f(\tilde{x}^\omega): \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, отображающей заданные последовательности в заданные, построить диаграмму Мура с возможно меньшим числом вершин; затем полученную диаграмму доопределить до диаграммы Мура всюду определённой ограниченно-детерминированной функции из $P_{2, \text{од}}^{1,1}$, и для этой новой функции построить каноническую таблицу и канонические уравнения:

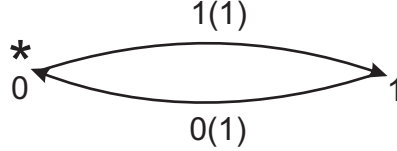
$$f(\tilde{0}^\omega) = [01]^\omega \quad \text{и} \quad f([10]^\omega) = \tilde{1}^\omega.$$

◀ Используя описанные в условии формулы, построим диаграммы Мура:

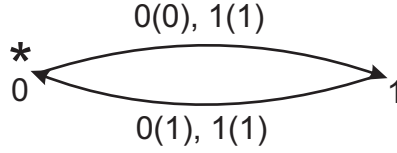
$$f(\tilde{0}^\omega) = [01]^\omega$$



$$f([10]^\omega) = \tilde{1}^\omega$$



Объединяем диаграммы и доопределяем функции $y(t)$ и $q_1(t)$:



По диаграмме Мура восстановим каноническую таблицу:

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0

Затем по канонической таблице выпишем канонические уравнения:

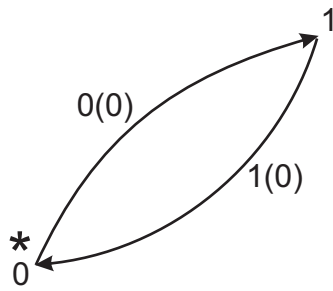
$$\begin{cases} y(t) = x(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 0. \quad \blacktriangleright \end{cases}$$

IV.2.5(2). Для частично определённой детерминированной функции $f(\tilde{x}^\omega): \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, отображающей заданные последовательности в заданные, построить диаграмму Мура с возможно меньшим числом вершин; затем полученную диаграмму доопределить до диаграммы Мура всюду определённой ограниченнодетерминированной функции из $P_{2, \text{од}}^{1,1}$, и для этой новой функции построить каноническую таблицу и канонические уравнения:

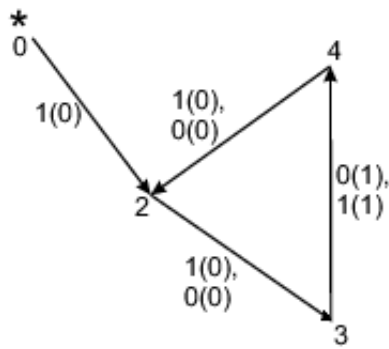
$$f([01]^\omega) = \tilde{0}^\omega \quad \text{и} \quad f(1[10]^\omega) = [001]^\omega.$$

◀ Используя описанные в условии формулы, построим диаграммы Мура:

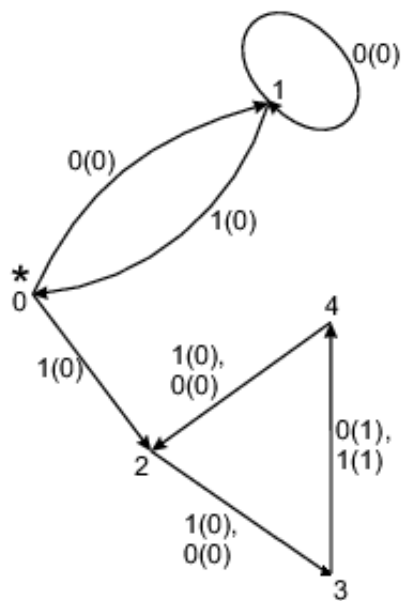
$$f([01]^\omega) = \tilde{0}^\omega$$



$$f(1[10]^\omega) = [001]^\omega \Leftrightarrow f(1[101010]^\omega) = 0[010010]^\omega$$



Объединяем диаграммы:



По диаграмме Мура выпишем каноническую таблицу (доопределённые ячейки выделены):

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$q_3(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$	$q_3(t)$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Теперь по канонической таблице построим канонические уравнения:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{q}_1 \cdot q_2 \cdot q_3, \\ q_1(t) = \bar{q}_1 \cdot q_2 \cdot q_3, \\ q_2(t) = \bar{q}_1 \cdot q_2 \cdot \bar{q}_3 \vee q_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_3 \vee x \cdot \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_3, \\ q_3(t) = \bar{x} \cdot \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \vee \bar{q}_1 \cdot q_2 \cdot \bar{q}_3, \\ q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

IV.2.11(1). Найти вес ограниченно-детерминированной функции, получающейся из ограниченно-детерминированной функции f с помощью операции отождествления входных переменных x_i и x_j :

$$f: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \rightarrow x_2(t) \& q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_2(t) \rightarrow \bar{x}_3(t) \& \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = x_1(t) \& \bar{x}_2(t) \vee \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

- а) $i = 1, j = 2$;
б) $i = 2, j = 3$.

- ◀ а) $i = 1, j = 2$. В этом случае исходная функция переходит в следующую:

$$f: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \rightarrow q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t) \rightarrow \bar{x}_3(t) \& \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

В соответствующей диаграмме Мура будет 4 состояния, причем все они достижимы.

Величина $y(t)$ существенно зависит от $x_1(t)$ и $q_1(t-1)$, а $q_1(t)$ — от $x_1(t)$, $x_3(t)$ и $q_2(t-1)$. Отсюда вес функции равен 4.

- б) $i = 2, j = 3$. В этом случае исходная функция переходит в следующую:

$$f: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \rightarrow x_2(t) \& q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_2(t) \rightarrow \bar{x}_2(t) \& \bar{q}_2(t-1) = \bar{x}_2(t), \\ q_2(t) = x_1(t) \& \bar{x}_2(t) \vee \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Из полученных канонических уравнений следует, что $q_2(t-1)$ не влияет на $y(t)$ и $q_1(t)$. Строим новые канонические уравнения:

$$f: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \rightarrow x_2(t) \& q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{x}_2(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

$q_1(t-1)$ — существенная переменная для $y(t)$, принимающая оба значения, поэтому вес функции равен 2. ▶

IV.2.8(1). Для суперпозиции $f = f_1(f_2)$ ограниченно-детерминированных функций f_1 и f_2 из $P_{2,од}^{1,1}$ построить канонические уравнения и приведённую диаграмму Мура:

$$f_1: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \rightarrow q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{x}_1(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

$$f_2: \begin{cases} y(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \downarrow \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 0. \end{cases}$$

◀ Построим суперпозицию заданных двух функций:

$$f: \begin{cases} y(t) = (x_2(t) \vee q_2(t-1)) \rightarrow q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{x}_2(t) \& \bar{q}_2(t-1) = \bar{x}_2(t), \\ q_2(t) = \bar{x}_2(t) \& q_2(t-1) \equiv 0, \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем формулу:

$$\begin{aligned} y(t) &= (x_2(t) \vee q_2(t-1)) \rightarrow q_1(t-1) = \\ &= \bar{x}_2(t) \& \bar{q}_2(t-1) \vee q_1(t-1) = \\ &= \bar{x}_2(t) \vee q_1(t-1). \end{aligned}$$

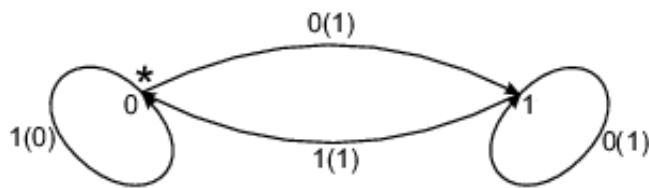
Канонические уравнения приобретают следующий вид:

$$f: \begin{cases} y(t) = \bar{x}_2(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{x}_2(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

Строим каноническую таблицу:

x_2	$q_1(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

Диаграмма Мура:



▶

Часть 2.

Курс «Дополнительные главы дискретной математики»

Занятие № 2.1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ФОРМАХ

III.1.1(1–5, 11). Доказать справедливость следующих равенств:

- 1) $-(\bar{x}) = \sim x$;
- 2) $x \supset y = \sim x \div y$;
- 3) $x \div (x \div y) = \min(x, y)$;
- 4) $(x \supset y) \supset y = \max(x, y)$;
- 5) $\overline{(x \supset y)} + \bar{x} = \min(x, y)$;
- 11) $\sim(\bar{x} \cdot \bar{y}) = (\sim x) \cdot \bar{y}$.

◀ 1. Преобразуем левую и правую части равенства, используя определения соответствующих функций:

$$\begin{aligned}
 -(\bar{x}) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \bar{x} = 0, \\ k - \bar{x} & \text{при } \bar{x} \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } (x+1) \pmod k = 0, \\ k - \bar{x} & \text{при } (x+1) \pmod k \neq 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{при } x = k-1, \\ (k-1) - x & \text{при } x \neq k-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\sim x = (k-1) - x = \begin{cases} 0 & \text{при } x = k-1, \\ (k-1) - x & \text{при } x \neq k-1 \end{cases}$$

В результате преобразований было получено одно и то же выражение — верность равенства доказана.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sim x \div y &= k-1-x \div y = k-1 - \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ x-y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} k-1, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ k-1-x+y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = x \supset y, \text{ что и требо-} \\
 &\text{валось доказать.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad x \dot{-} (x \dot{-} y) &= x \dot{-} \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ x-y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} x \dot{-} 0, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ x \dot{-} (x-y), & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \min(x, y), \text{ что и требовалось до-} \\
&\text{казать.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad (x \supset y) \supset y &= x \dot{-} \begin{cases} (k-1) \supset y, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ (k-1-x+y) \supset y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (k-1) - (k-1) + y, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ (k-1) - (k-1-x+y) + y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} y, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ x, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \max(x, y), \text{ что и требовалось до-} \\
&\text{казать.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad (x \supset y) + \bar{x} &= \begin{cases} k-1 + \bar{x}, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ k-1-x+y+\bar{x}, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} k-1+x+1, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ k-1-x+y+x+1, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1 \end{cases} = \min(x, y), \text{ что и требовалось до-} \\
&\text{казать.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \quad \sim(\bar{x} \cdot \bar{y}) &= \sim(\bar{x} \cdot \bar{y}) + 1 = (k-1) - \bar{x} \cdot \bar{y} + 1 = k - (x+1)(y+1) = \\
&= k-1-x \cdot y - x - y. \\
(\sim x) \cdot \bar{y} &= (k-1-x)(y+1) = k \cdot y + k - y - 1 - x \cdot y - x = \\
&= k-1-x \cdot y - x - y.
\end{aligned}$$

В результате преобразований правой и левой частей равенства пришли к одному и тому же выражению — верность равенства доказана. ►

III.1.2(13). Показать, что функция f из P_k порождается с помощью операции суперпозиции множеством функций A ($A \subset P_k$), если

$$f = J_{k-2}(x), \quad A = \{k-1, x+2, x \dot{-} y\}.$$

◀ С помощью функций множества A получим $J_0(x)$:

$$J_0(x) = (\dots ((k-1) \dot{-} x) \underbrace{\dots \dot{-} x}_{k-1 \text{ раз}}) \dot{-} x.$$

Искомая $f = J_{k-2}(x) = J_0(x+2)$. ►

III.1.11(1, 10). Для заданного k представить функцию f в первой и второй формах (полученные выражения упростить):

- 1) $f = \bar{x}$, $k = 3$;
 10) $f = x \div y^2$, $k = 3$.

◀ 1. Представим $f(x)$ в первой форме:

$$\begin{aligned} f(x) &= \max(\min(\bar{0}, J_0(x)), \min(\bar{1}, J_1(x)), \min(\bar{2}, J_2(x))) = \\ &= \max(\min(1, J_0(x)), \min(2, J_1(x)), \min(0, J_2(x))) = \\ &= \max(\min(1, J_0(x)), J_1(x)). \end{aligned}$$

Представим $f(x)$ во второй форме:

$$f(x) = \bar{0} \cdot j_0(x) + \bar{1} \cdot j_1(x) + \bar{2} \cdot j_2(x) = j_0(x) + 2j_1(x).$$

10. Построим таблицу значений функции $f(x)$:

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	1

Представим $f(x, y)$ в первой форме:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \max(\min(1, J_1(x), J_0(y)), \min(J_2(x), J_0(y)), \\ &\quad \min(1, J_2(x), J_1(y)), \min(1, J_2(x), J_2(y))). \end{aligned}$$

Представим $f(x, y)$ во второй форме:

$$f(x, y) = j_1(x) \cdot j_0(y) + 2 \cdot j_2(x) \cdot j_0(y) + j_2(x) \cdot j_1(y) + j_2(x) \cdot j_2(y). \quad \blacktriangleright$$

Занятие № 2.2

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ПО МОДУЛЮ k

III.2.2(1–3). Для функции f из P_k при заданном k подобрать классы типа $T(\xi)$ и $U(D)$, которым она принадлежит. При этом ξ должно быть *собственным подмножеством* множества E_k (то есть $\xi \neq \emptyset$ и $\xi \neq E_k$), а D — таким разбиением $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ множества E_k , чтобы выполнялись неравенства $1 < s < k$:

- 1) $k = 3$, $f = x^2 + 1$;
 2) $k = 3$, $f = J_0(x^2 + 2x)$;
 3) $k = 3$, $f = (x^2 \div y^2) + 1$.

◀ 1. Построим таблицу значений данной функции f :

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	2

При $x \in \xi = \{1, 2\}$ значения $f(x)$ принадлежат ξ . При этом ξ — собственное подмножество множества E_ξ . Значит, $f(x)$ содержится в классе $T(\{1, 2\})$.

Рассмотрим разбиение $D = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Функция $f(x)$ сохраняет его, так как первая компонента разбиения состоит из одного элемента, а для второй верно $f(1) = f(2) = 2$. Значит, $f(x)$ содержится в классе $U(\{0\}, \{1, 2\})$.

2. Построим таблицу значений данной функции f :

x	$f(x)$
0	2
1	2
2	0

Функция сохраняет множество $\{0, 2\}$ и разбиение $\{\{1\}, \{0, 2\}\}$, поэтому содержится в классе $U(\{1\}, \{0, 2\})$.

3. Построим таблицу значений данной функции f :

$x \backslash y$	0	1	2
0	1	1	1
1	2	1	1
2	2	1	1

При $x, y \in \xi = \{1, 2\}$ значения $f(x)$ принадлежат ξ — собственному подмножеству множества E_k . Значит, $f(x)$ содержится в классе $T(\{1, 2\})$.

Рассмотрим разбиение $D = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Функция $f(x)$ сохраняет его, и поэтому $f(x)$ содержится в классе $U(\{0\}, \{1, 2\})$. ►

III.2.3.

1. Пусть $\xi \subseteq E_k$. Доказать, что $T(\xi) \neq P_k$ тогда и только тогда, когда ξ — собственное подмножество множества E_k .
2. Сколько существует различных замкнутых классов в P_k , являющихся классами сохранения множеств?
3. Пусть $\xi \subseteq E_k$. Подсчитать число функций в P_k , содержащихся в классе $T(\xi)$ и зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 0$).

- ◀ 1. Если функция $f(\tilde{x}^n)$ на множестве ξ^n принимает хотя бы одно значение не из ξ , то она не принадлежит классу $T(\xi)$. В силу замкнутости класса $T(\xi)$, он не совпадает с P_k при $\xi \neq \emptyset$ и $\xi \neq P_k$. Если же $\xi = \emptyset$ или $\xi = P_k$, то любая функция из P_k сохраняет множество ξ .
2. k -элементное множество ξ имеет 2^k подмножеств. Из них собственными являются $2^k - 2$. Следовательно, соответствующих им замкнутых классов $T(\xi)$, не равных P_k , также будет $2^k - 2$.
3. Везде, кроме множества ξ^n , функция из $T(\xi)$ может принимать произвольные значения; на множестве же ξ^n — только значения, принадлежащие ξ . Поэтому общее количество функций n переменных, содержащихся в $T(\xi)$, в точности равно $|\xi|^{|\xi|^n} \cdot k^{k^n - |\xi|^n}$. ▶

III.2.4(1). Пусть $D = \{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ — разбиение множества E_k . Доказать, что $U(D) \neq P_k$ тогда и только тогда, когда $1 < s < k$.

◀ Класс сохранения разбиения $U(D)$ замкнут. Если разбиение нетривиально ($1 < s < k$), то всегда найдутся два различных эквивалентных набора. Функция, определённая на них неэквивалентными значениями, не принадлежит классу $U(D)$, поэтому $U(D) \neq P_k$. Если $s = k$, то эквивалентность наборов означает их совпадение. Если $s = 1$, то все значения функций эквивалентны. Таким образом, в этих случаях $U(D) = P_k$. ▶

III.2.7(1, 6). Разложить в полином по модулю k функцию f из P_k :

- 1) $f = 2x \div x^2$, $k = 5$;
 6) $f = \min(x^2, y)$, $k = 3$.

- ◀ 1. Построим таблицу значений данной функции f :

x	$2x$	x^2	$f(x)$
0	0	0	0
1	2	1	1
2	4	4	0
3	1	4	0
4	3	1	2

Представим $f(x, y)$ во второй форме:

$$f(x) = j_1(x) + 2j_4(x).$$

Воспользуемся тем, что $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$, если k — простое число и $k \geq 3$, и $j_i(x) = j_0(x - i)$, где разность и степень берутся по модулю k . В результате получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= j_0(x - 1) + 2j_0(x - 4) = (1 - (x - 1)^4) + 2(1 - (x - 4)^4) = \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

6. Построим таблицу значений данной функции f :

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

Представим $f(x, y)$ во второй форме:

$$f(x, y) = j_1(x) \cdot j_1(y) + j_1(x) \cdot j_2(y) + j_2(x) \cdot j_1(y) + j_2(x) \cdot j_2(y).$$

Заметим, что $j_0(x) + j_1(x) + j_2(x) = 1$ при $k = 3$. Имеем

$$f(x, y) = (1 - j_0(x)) \cdot (1 - j_0(y)) = x^2 \cdot y^2. \quad \blacktriangleright$$

III.2.12(1, 2). Выяснить, представима ли полиномом по модулю k функция f из P_k :

- 1) $f = 3x \div 2x^2$, $k = 4$;
- 2) $f = 3j_0(x)$, $k = 6$.

◀ 1. Построим таблицу степеней x по модулю 4 и значений функции:

x	x^2	x^3	x^4	$f(x)$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	3	1	0

Отметим, что $x^4 \equiv x^2$. Поэтому, если $f(x)$ представима полиномом, то он имеет степень не больше 3:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3.$$

По вектору значений функции получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0, \\ a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = 1, \\ a_0 + 2 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 2, \\ a_0 + 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 = 0 \end{cases}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} a_0 & = 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 & = 1, \\ 2a_1 & = 2, \\ 3a_1 + a_2 + 3a_3 & = 0 \end{cases}$$

Вычтем из четвертого уравнения второе и получим уравнение $2a_1 + 2a_3 = 3$, которое не имеет решений. Поэтому система не совместна, а функция $f(x)$ не представима полиномом по модулю 4.

2. Построим таблицу значений функции и значений x^2, x^3 :

x	x^2	x^3	$f(x)$
0	0	0	3
1	1	1	0
2	4	2	0
3	3	3	0
4	4	4	0
5	1	5	0

Отметим, что $x^3 \equiv x$. Если $f(x)$ представима полиномом, то он имеет степень не выше 2:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 3, \\ a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 0, \\ a_0 + 2 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 = 0, \\ a_0 + 3 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 = 0, \\ a_0 + 4 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 = 0, \\ a_0 + 5 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения $a_0 = 3$. Подставив a_0 во второе уравнение, получаем $a_1 + a_2 = 3$. Подставив это в пятое уравнение, получим слева 3, а справа 0. Таким образом, система не имеет решений, а значит, и функцию $f(x)$ нельзя представить полиномом по модулю 6. ►

III.2.13(1, 2). Подбрав подходящий класс типа $T(\xi)$ или $U(D)$, доказать, что система A не полна в P_k :

- 1) $A = \{\sim x, \min(x, y), x \cdot y^2\}$;
- 2) $A = \{1, 2, x \div j_2(x), \max(x, y)\}$.

◀ 1. Функции $\sim x$ и $\min(x, y)$ сохраняют множество $\xi = \{0, k-1\}$. Проверим, принадлежит ли функция $x \cdot y^2$ классу $T\{\xi\}$:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0^2 &= 0, & (k-1) \cdot 0^2 &= 0, \\ 0 \cdot (k-1)^2 &= 0, & (k-1) \cdot (k-1)^2 &= k-1. \end{aligned}$$

Все функции системы A содержатся в $T(\{0, k-1\})$, а значит, система A не полна в P_k .

2. Функции 1, 2 и $\max(x, y)$ сохраняют множество $\xi = \{1, 2\}$. Проверим, принадлежит ли функция $\overline{x \div j_2(x)}$ классу $T(\xi)$:

$$1 \div j_2(1) = 2,$$

$$2 \div j_2(2) = 2.$$

Все функции системы A содержатся в $T(\{1, 2\})$, а значит, система A не полна в P_k . ►

Занятие № 2.3

ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

III.2.14. Как известно, система

$$A = \{0, 1, \dots, k-1, j_0(x), j_1(x), \dots, j_{k-1}(x), x + y, x \cdot y\}$$

полна в P_k .

1. Доказать, что из системы A можно выделить полную в P_k подсистему, состоящую из двух функций.
2. Показать, что любая подсистема системы A , состоящая из одной функции, не полна в P_k .

◀ 1. Рассмотрим систему $B = \{j_0(x), x + y\}$. Выразим все функции системы A через функции системы B . Так как A полна в P_k , то тем самым будет доказана полнота в P_k системы B .

Получение недостающих функций:

$$\begin{aligned} 1 &= j_0(x) + j_0(j_0(x)), \\ 2 &= 1 + 1, \\ &\dots \\ 0 &= (k-1) + 1, \\ j_i(x) &= j_0(x + (k-i)), \end{aligned}$$

$$x \cdot y = \sum_{\sigma_1=0}^{k-1} \sum_{\sigma_2=0}^{k-1} j_{\sigma_1}(x) \cdot j_{\sigma_2}(y) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sum_{\sigma_1=0}^{k-1} \sum_{\sigma_2=0}^{k-1} \sum_{u=\sigma_1 \cdot \sigma_2}^{u=1} j_{\sigma_1}(x) \cdot j_{\sigma_2}(y),$$

где $j_{\sigma_1}(x) \cdot j_{\sigma_2}(y) = j_2(j_{\sigma_1}(x) + j_{\sigma_2}(y))$.

2. Заметим, что любая функция системы A содержится в каком-то из нетривиальных классов типа $T(\xi)$:
 - функции 0, $x + y$, $x \cdot y$ содержатся в классе $T(\{0\})$;
 - функции $j_0(x)$, $j_1(x)$, ..., $j_{k-1}(x)$ — в классе $T(\{0, 1\})$;
 - функции 1, 2, ..., $k-1$ — в классе $T(\{1, 2, \dots, k-1\})$.

Значит, никакая подсистема системы A , состоящая из одной функции, не полна в P_k . ►

III.2.15. Система Россера–Туркетта

$$A_1 = \{0, 1, \dots, k-1, J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), \min(x, y), \max(x, y)\},$$

как известно, полна в P_k .

1. Проверить, что, удаляя из A_1 любую константу, отличную от 0 и $k-1$, получаем подсистему, содержащуюся в некотором классе типа $T(\xi)$, где $\emptyset \neq \xi \neq E_k$ (и, значит, неполную в P_k).
2. Выделить из системы A_1 полную в P_k подсистему, состоящую из $2k-2$ функций.

- ◀ 1. Удалим из A_1 любую константу i , отличную от 0 и $k-1$. Получим подсистему, содержащуюся в классе $T(E_k \setminus \{i\})$.
2. Рассмотрим подсистему системы A_1 , состоящую из $2k-2$ функций: $\{1, 2, \dots, k-2, J_1(x), J_2(x), \dots, J_{k-2}(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$.

Докажем, что рассматриваемая система полна:

$$\begin{aligned} 0 &= J_1(J_1(x)), \\ k-1 &= J_1(1), \\ J_0(x) &= J_1(\max(1, x, J_1(x), J_2(x), \dots, J_{k-2}(x))), \\ J_{k-1}(x) &= J_0(\max(J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-2}(x))). \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

III.2.16(1, 3). Для заданных k исследовать на полноту следующие подсистемы системы Россера–Туркетта:

- 1) $k = 3$, $\{1, J_0(x), J_2(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$;
- 3) $k = 4$, $\{1, 2, J_0(x), J_1(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$.

- ◀ 1. Сведём данную подсистему к заведомо полной системе Россера–Туркетта и тем самым докажем полноту подсистемы. Для этого нужно выразить функции 0, 2, $J_1(x)$ через функции подсистемы:

$$\begin{aligned} 0 &= J_0(1), \\ 2 &= J_0(0), \\ J_1(x) &= J_0(\max(J_0(x), J_2(x))). \end{aligned}$$

3. Константы сохраняют любое разбиение. Функция $J_i(x)$ сохраняет любое разбиение, в котором константа i принадлежит одноэлементному множеству. Минимум и максимум сохраняют все монотонные разбиения. Таким образом, все функции системы принадлежат классу $U(\{0\}, \{1\}, \{2, 3\})$. Система не полна. ►

III.2.22(1, 2, 5). Доказать, что приводимые ниже системы полны в P_k тогда и только тогда, когда k — простое число:

- 1) $\{1, x + y + x \cdot z\};$
- 2) $\{x - y + 1, x^2 - y, x \cdot y^2\};$
- 5) $\{k - 2, x + 2y, x \cdot y^2\}.$

◀ Система полиномов по модулю k (и, следовательно, любая её подсистема) неполна при составном k . Для полноты подсистемы при простом k достаточно получить функции 1 , $x + y$ и $x \cdot y$.

1. Подставим $x = y = 1$ в функцию $x + y + x \cdot z$, получим функцию $z + 2$, из которой получаются все константы тогда и только тогда, когда k — нечётное число. Далее

$$\begin{aligned} x + y + x \cdot z \Big|_{z=0} &= x + y, \\ x + y + x \cdot z \Big|_{y=0} &= x + x \cdot z = x(z + 1) \Big|_{z=u-1} = x \cdot u. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x - y + 1 \Big|_{x=y} &= 1, \\ x^2 - y \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= 0, \\ x - y + 1 \Big|_{y=0} &= x + 1, \end{aligned}$$

следовательно, можно получить все константы. Далее

$$\begin{aligned} x - y + 1 \Big|_{y=u+1} &= x - u, \\ x \cdot y^2 \Big|_{x=1} &= y^2, \\ \underbrace{x - y - \dots - y}_{k-1 \text{ раз}} &= x + y. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить произведение, рассмотрим функцию

$$x^2 - y \Big|_{\substack{y=(u-v)^2 \\ x=(u+v)}} = 4 \cdot u \cdot v.$$

Обозначим через c^{-1} решение уравнения $c \cdot x \equiv 1 \pmod{k}$. Тогда

$$\underbrace{4uv + \dots + 4uv}_{4^{-1} \text{ раз}} = uv.$$

5. Если k — простое число, то

$$\begin{aligned} \underbrace{(x+2y) + 2y + \dots + 2y}_{(k+1)/2 \text{ раз}} &= x + y, \\ \underbrace{(x + y) + y + \dots + y}_{k-1 \text{ раз}} &= x - y, \\ \underbrace{(k-2) + \dots + (k-2)}_{(k-2)^{-1} \text{ раз}} &\equiv 1 \pmod{k}. \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} x \cdot y^2 \Big|_{x=\bar{1}} &= y^2, \\ (x+y)^2 - (x-y)^2 &= 4xy, \\ \underbrace{4xy + \dots + 4xy}_{4^{-1} \text{ раз}} &= 1. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Занятие № 2.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ НА ПОЛНОТУ. КРИТЕРИЙ СЛУПЕЦКОГО

III.2.19(1–4). Используя метод сведения к заведомо полным системам, доказать полноту в P_k следующих систем:

- 1) $\{J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), x^2, x \div y\}$;
- 2) $\{k-1, x \div y, x+y\}$;
- 3) $\{\sim x, x+2, x \div y\}$;
- 4) $\{-x, 1-x^2, x \div y\}$.

◀ 1. Сведём данную систему к системе Россера–Туркетта:

$$\begin{aligned} 0 &= J_1(J_0(x)), \\ k-1 &= J_0(0), \\ 1 &= (k-1)^2, \\ k-2 &= (k-1) \div 1, \\ \dots \\ 2 &= 3 \div 1, \\ \min(x, y) &= x \div (x \div y) \text{ (см. III.1.1(3))}, \\ \max(x, y) &= \sim \min(\sim x, \sim y). \end{aligned}$$

2. Сведём данную систему к системе Поста:

$$\begin{aligned} \max(x, y) &= x \div y + y, \\ k-2 &= (k-1) + (k-1), \\ 1 &= (k-1) \div (k-2), \\ \bar{x} &= x + 1. \end{aligned}$$

3. Для любого $k \geq 3$

$$\begin{aligned} x \div (x \div y) &= \min(x, y), \\ \sim \min(\sim x, \sim y) &= \max(x, y). \end{aligned}$$

Для нечётных k получим систему Поста:

$$(x+2) + \underbrace{2 + \dots + 2}_{(k+1)/2 \text{ раз}} = x + 1 = \bar{x}.$$

Для чётных k получим систему Россера–Туркетта:

$$\begin{aligned} x \div x &= 0, \\ 0 + 2 &= 2, \\ 2 + 2 &= 4, \\ \dots \\ (k-4) + 2 &= k-2, \\ \sim 0 &= k-1, \\ \sim 2 &= k-3, \\ \dots \\ \sim (k-2) &= 1, \\ J_0(x) &= (\dots ((k-1) \div x) \dots \div x) \div x, \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{k-1 \text{ раз}} \end{aligned}$$

$$\text{Для чётных } c: \quad J_c(x) = J_0(x+2) + \underbrace{2 + \dots + 2}_{c/2 \text{ раз}}$$

$$\text{Для нечётных } c: \quad J_c(x) = J_{k-1-c}(\sim x).$$

4. Сведём данную систему к системе Поста:

$$\begin{aligned} x \div x &= 0, \\ 1 - x^2 \big|_{x=0} &= 1, \\ -x \big|_{x=1} &= k-1, \\ (k-1) \div y &= \sim y, \\ x \div (x \div y) &= \min(x, y), \\ \sim \min(\sim x, \sim y) &= \max(x, y), \\ -(\sim x) &= k - ((k-1) - x) = x + 1 = \bar{x}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

III.2.20(1, 2). Используя критерий Слупецкого, доказать полноту в P_k следующих систем:

- 1) $\{k-1, x-y+2, x^2 \div y\};$
- 2) $\{j_2(x), x+y^2, x \cdot y+1\}.$

- ◀ 1. $(x - y + 2)$ — существенная функция, принимающая все k значений.

$$\begin{aligned}(k-1)^2 \div (k-1) &= 0, \\ (k-1)^2 \div 0 &= 1, \\ x - y + 2 \Big|_{y=1} &= x + 1 = \bar{x}, \\ x - \bar{y} + 2 &= x - y, \\ \underbrace{(x-y) - y - \dots - y}_{k-1 \text{ раз}} &= x + y, \\ 1^2 \div x &= j_0(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j_0(x + (k-1)) &= j_1(x), \\ (x + j_0(x)) - j_1(x) &= h_{01}(x).\end{aligned}$$

Итак, получена система $\{\bar{x}, x + j_0(x), h_{01}(x)\}$, которая является полной в $P_k^{(1)}$ по теореме С. Пикар.

2. $(x + y^2)$ — существенная функция, принимающая все k значений.

$$\begin{aligned}j_2(j_2(x)) &= 0, \\ x \cdot 0 + 1 &= 1, \\ x + 1^2 &= \bar{x}.\end{aligned}$$

При помощи отрицания поста получаем все константы и функции вида $x + c$.

$$\begin{aligned}j_2(x + 2) &= j_0(x), \\ x + y^2 \Big|_{y=j_0(x)} &= x + j_0(x), \\ j_0(x + (k-1)) &= j_1(x).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$(x + j_0(x)) + \underbrace{j_1^2(x) + \dots + j_1^2(x)}_{k-1 \text{ раз}} = x + j_0(x) - j_1(x) = h_{01}(x).$$

Получили систему $\{\bar{x}, x + j_0(x), h_{01}(x)\}$, которая является полной в $P_k^{(1)}$ по теореме С. Пикар. ▶

III.2.21(5, 6, 11). Исследовать на полноту в P_k следующие системы:

- 5) $\{2, 2x + y, x^2 \div y\};$
 6) $\{1, 2, \max(\bar{x}, y)\};$
 11) $\{\sim x, 2j_0(x), J_1(x), x \div y\}.$

- ◀ 5. Если k чётно, то все три функции сохраняют множество чётных констант, то есть принадлежат классу $T(\{0, 2, \dots, k-2\})$, поэтому система не полна в P_k .

Если k нечётно, то

$$\begin{aligned} \underbrace{(y+2x) + 2x + \dots + 2x}_{(k+1)/2 \text{ раз}} &= y + x, \\ \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{(k+1)/2 \text{ раз}} &= 1, \\ x^2 \dot{-} y \Big|_{x=1} &= 1 \dot{-} y = j_0(y). \end{aligned}$$

При нечётных k система $\{x + y, j_0(x)\}$ полна в P_k .

6. Система функций сохраняет множество $E_k \setminus \{0\}$, следовательно, не является полной.
11. Если k нечётно, то все четыре функции сохраняют множество чётных констант $\{0, 2, \dots, k-1\}$, поэтому система не полна в P_k .

Если k чётно, получим все константы:

$$\begin{aligned} J_1(J_1(x)) &= 0, \\ \sim x \Big|_{x=0} &= k-1, \\ 2j_0(0) &= 2, \\ (k-1) \dot{-} 2 &= k-3, \\ \dots \\ 3 \dot{-} 2 &= 1, \\ (k-1) \dot{-} 1 &= k-2, \\ (k-2) \dot{-} 2 &= k-4, \\ \dots \\ 6 \dot{-} 2 &= 4. \end{aligned}$$

Теперь получим систему Россера–Туркетта, что завершит доказательство полноты исходной системы:

$$\begin{aligned} J_1(x \dot{-} c) &= J_{c+1}(x) \text{ для } c \neq k-1, \\ J_0(x) &= (\dots ((k-1) \underbrace{\dot{-} x \dots \dot{-} x}_{k-1 \text{ раз}}) \dot{-} x, \\ x \dot{-} (x \dot{-} y) &= \min(x, y), \\ \sim \min(\sim x, \sim y) &= \max(x, y). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Занятие № 2.5

ЗАДАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ДЕРЕВЬЯМИ

IV.1.1(1–3, 8–10). Пусть $f(x(1)x(2)\dots x(t)\dots) = y(1)y(2)\dots y(t)\dots$ — функция из множества $P_{2,\omega}^{1,1}$. Выяснить, является ли она детерминированной:

- 1) $y(1) = x(1)$ и $y(t) = x(1) \oplus x(2) \oplus \dots \oplus x(t)$ при $t \geq 2$;
- 2) $y(t) = x(1) \vee x(2) \vee \dots \vee x(t) \vee x(t+1)$ при $t \geq 1$;
- 3) $y(t) = x(1) \cdot x(2) \cdot \dots \cdot x(t) \cdot x(t+2) \rightarrow x(1)$ при $t \geq 1$;
- 8) $y(1) = 1$ и $y(t) = x(2 + x(t))$ при $t \geq 2$;
- 9) $y(1) = y(2) = 0$ и $y(t) = x(2 + x(t))$ при $t \geq 3$;
- 10) $y(1) = 1$ и $y(t) = x(2 + y(t-1))$ при $t \geq 2$.

- ◀ 1. Да, является, так как значение функции в момент t зависит только от $x(1), \dots, x(t)$.
2. Нет, так как $y(1) = x(1) \vee x(2)$, то есть $y(1)$ существенно зависит от входа $x(2)$.
3. Да, несмотря на формальную зависимость от входа $x(t+2)$, функция детерминирована, так как $y(t) \equiv 1$.
8. Нет, так как при $t = 2$ и $x(2) = 1$ $y(2) = x(2 + x(2)) = x(3)$.
9. Да, так как $y(t) = x(t)x(3) \vee \bar{x}(t)x(2)$ при $t \geq 3$.
10. Нет, так как $y(2) = x(2 + y(1)) = x(3)$. ▶

IV.1.2(1). Является ли детерминированной функция f из $P_{2,\omega}^{1,1}$, заданная следующим описанием:

$$f(\tilde{x}^\omega) = \begin{cases} \tilde{0}^\omega, & \text{если } \tilde{x}^\omega = \tilde{0}^\omega, \\ \tilde{1}^\omega, & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

- ◀ Нет, поскольку значение $y(t)$ существенно зависит от бесконечного числа входов $x(s)$ таких, что $s \geq t$. ▶

IV.1.4(1, 2). В дереве, соответствующем функции f из $P_{2,\omega}^{1,1}$, изменена метка на ребре l -го яруса, принадлежащем цепи, отвечающей входной последовательности 0^ω . Найти вес $r(f)$ функции f и вес $r(g)$ вновь полученной функции g , если:

- 1) $f(\tilde{x}^\omega) \equiv \tilde{0}^\omega$, $l = 3$;
- 2) $f(\tilde{x}^\omega) = \tilde{x}^\omega$, $l = 4$.

- ◀ 1. Вес исходной функции, очевидно, равен 1. Построим 4 яруса информационного дерева измененной функции. Применим естественную нумерацию вершин дерева: корень занумеруем нулём, а остальные вершины — натуральными числами по слоям, слева направо. Все вершины делятся на четыре класса эквивалентности: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$ и четвёртый — все остальные вершины. Поэтому $r(g) = 4$.

2. Вес исходной функции равен 1, так как все остаточные функции совпадают с f . Построим 5 ярусов информационного дерева из-мененной функции. Все вершины делятся на пять классов эквивалентности: $\{0\}, \{1\}, \{3\}, \{7\}$ и пятый — все остальные вершины. Поэтому $r(g) = 5$. ►

IV.1.10(1, 2). Выяснить, является ли функция $f \in \hat{P}_{2, \text{д}}$ ограниченно-детерминированной функцией, и найти её вес:

- 1) $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 1, \\ \bar{x}(t-1) & \text{при } t \geq 2; \end{cases}$
 2) $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ x(t) & \text{при } t \geq 2. \end{cases}$

◀ 1. Рассмотрим остаточные функции:

$$\begin{aligned} f(0\tilde{x}^\omega) &= 1f(\tilde{x}^\omega), \\ f(1\tilde{x}^\omega) &= 1f_1(\tilde{x}^\omega), \\ f_1(0\tilde{x}^\omega) &= 0f(\tilde{x}^\omega), \\ f_1(1\tilde{x}^\omega) &= 0f_0(\tilde{x}^\omega). \end{aligned}$$

Различных функций всего две. Следовательно, функция f является ограниченно-детерминированной, и $r(f) = 2$.

2. Да, является. Остаточными функциями f являются $0x(t+1)x(t+2) \dots$ и $x(t)x(t+1)x(t+2) \dots$, поэтому функция f является ограниченно-детерминированной, и $r(f) = 2$. ►

IV.1.15(1). Функция f из $P_{A, B, \text{д}}$ называется *автономной* (или константой, или функцией без входа), если она принимает постоянное значение (на множестве A^ω), то есть если на любом входном слове $\tilde{x}^\omega \in A^\omega$ функция f равна одному и тому же (выходному) слову из B^ω .

Выяснить, является ли автономной функция $f \in P_{2, \text{д}}^{1,1}$, и, если она автономна, найти её вес:

$$f: \begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = \bar{y}(t-1), t \geq 2. \end{cases}$$

◀ Да, функция является автономной, так как $f(\tilde{x}^\omega) = 010101\dots = [01]^\omega$, и $r(f) = 2$. ►

Занятие № 2.6

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННО- ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ДИАГРАММАМИ МУРА И КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

IV.2.1(1, 2, 6, 35). Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для функции $f(\tilde{x}^\omega) = y(1)y(2) \dots y(t) \dots$ из $P_{2, \text{од}}^{1,1}$:

$$\begin{aligned} 1) \quad y(t) &= \begin{cases} 1 & \text{при } t = 1, \\ x(t-1) \rightarrow x(t) & \text{при } t \geq 2; \end{cases} \\ 2) \quad y(t) &= \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ x(t-1) \rightarrow \bar{y}(t-1) & \text{при } t \geq 2; \end{cases} \\ 6) \quad y(t) &= \begin{cases} x(t) & \text{при } t = 1, 2, \\ \bar{x}(t-1) & \text{при } t \geq 3; \end{cases} \\ 35) \quad y(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } t = 3s - 2 \text{ и } s \geq 1, \\ 1, & \text{если } t = 3s - 1 \text{ и } s \geq 1, \\ x(t) & \text{в ином случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

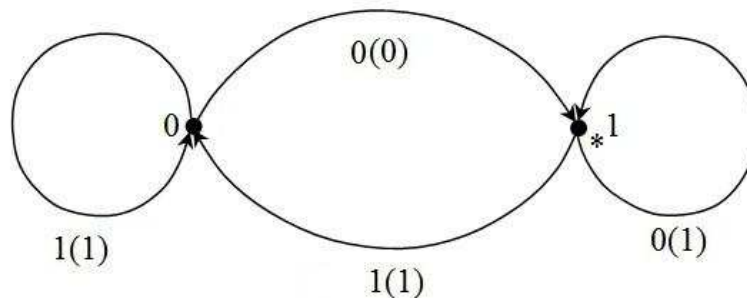
- ◀ 1. Положим $q(t) = \bar{x}(t)$ и получим следующие канонические уравнения, описывающие заданную функцию:

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1) \vee x(t), \\ q(t) = \bar{x}(t), \\ q(0) = 1. \end{cases}$$

Каноническая таблица:

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Диаграмма Мура:



2. Для запоминания $x(t-1)$ и $y(t-1)$ используем две переменные: $q_1(t-1)$ и $q_2(t-1)$ соответственно. При этом $y(1) = 0$:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = \bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 1, \\ q_2(0) = 1. \end{cases}$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$q(t) = \bar{q}_1(t) \vee \bar{q}_2(t)$$

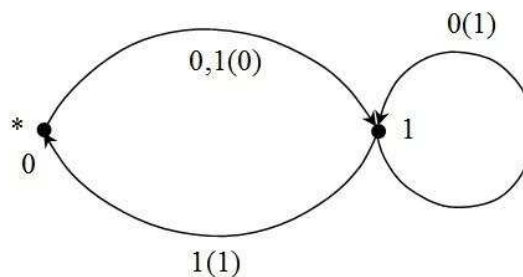
Тогда получаем канонические уравнения:

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \bar{q}(t-1) \vee \bar{x}(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

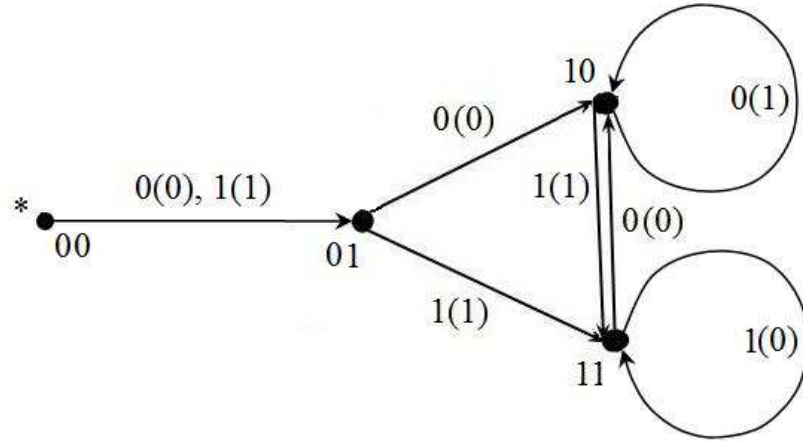
Соответствующая каноническая таблица:

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Диаграмма Мура:



6. По заданной функции построим диаграмму Мура:



Каноническая таблица:

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Канонические уравнения:

$$\begin{cases} y(t) = q_1(t-1) \cdot \bar{q}_2(t-1) \vee x(t) \cdot \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \vee q_2(t-1), \\ q_2(t) = x(t) \vee \bar{q}_1(t-1) \cdot \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 0. \end{cases}$$

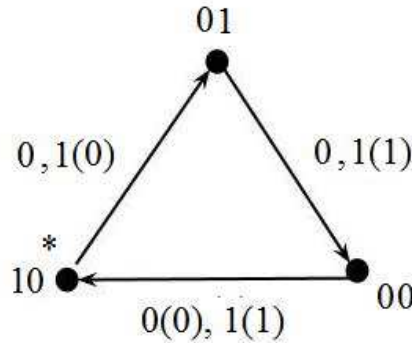
35. Закодируем моменты времени с помощью $q_1(t)$ и $q_2(t)$: пусть 00 соответствует $t = 3s$, 01 соответствует $t = 3s - 1$ и 10 соответствует $t = 3s - 2$. Построим каноническую таблицу с учетом этого. Так как состояние 11 не достигается, то в соответствующих ему строках величины $y(t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ можно доопределить произвольным образом. $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 0$ — начальный момент, так как $t = 1$ соответствует $t = 3s - 2$ при $s = 1$.

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Канонические уравнения:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t) \cdot q_2(t-1) \vee x(t) \cdot \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{q}_1(t-1) \cdot \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = 1, \\ q_2(0) = 0. \end{cases}$$

По таблице построим диаграмму Мура, которая, очевидно, является приведенной:



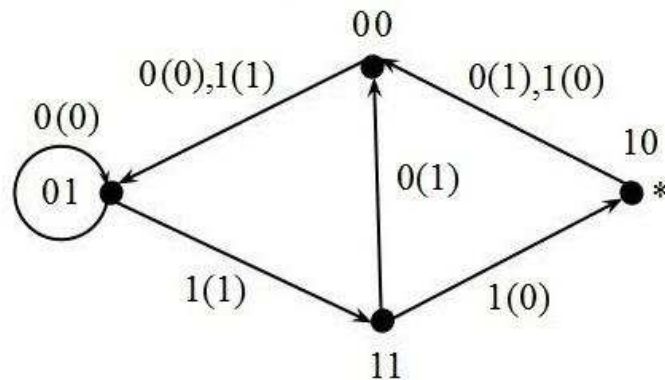
IV.2.4(2). Найти вес ограниченно-детерминированной функции f из $P_{2,\text{од}}^{1,1}$, заданной каноническими уравнениями:

$$f: \begin{cases} y(t) = x(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 1, \\ q_2(0) = 0. \end{cases}$$

◀ Построим каноническую таблицу:

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

Нарисуем диаграмму Мура:



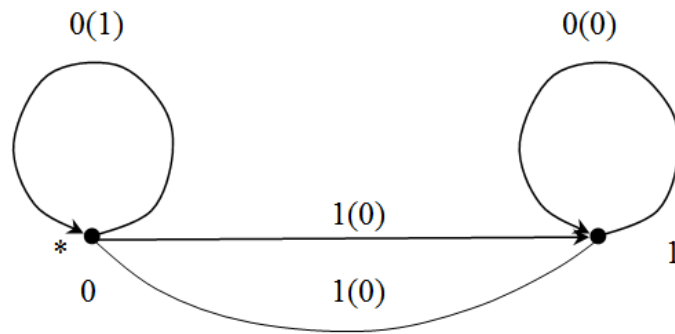
Так как эквивалентных вершин нет, диаграмма является приведенной, и вес функции f равен четырём. ►

Занятие № 2.7

ОПЕРАЦИИ НАД ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

IV.2.8(6, 7). Для суперпозиции $f = f_1(f_2)$ ограниченно-детерминированных функций f_1 и f_2 из $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ построить канонические уравнения и приведённую диаграмму Мура.

6. Функция f_1 задаётся диаграммой Мура, изображённой на рисунке:



$$f_2: \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \mid q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \rightarrow \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 1. \end{cases}$$

7. Функции f_1 и f_2 задаются диаграммами Мура, изображёнными на рис. 1 и рис. 2 соответственно:

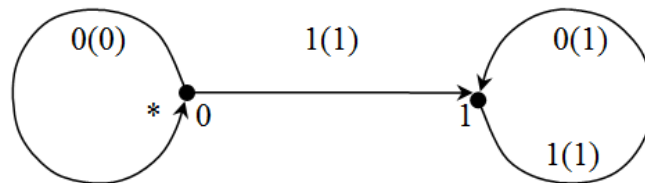


Рис. 1

0(1), 1(1)

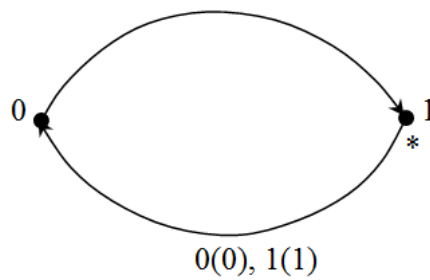


Рис. 2

◀ 6. Построим каноническую таблицу для функции f_1 :

$x_1(t)$	$q_1(t-1)$	$y_1(t)$	$q_1(t)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

По таблице построим канонические уравнения:

$$f_1: \begin{cases} y_1(t) = \bar{x}_1(t)\bar{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

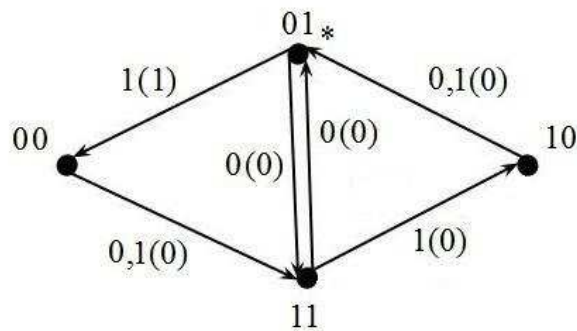
Подставим выражение для $y_2(t)$ вместо $x_1(t)$ и добавим уравнения для переменной состояния $q_2(t)$ к полученной системе:

$$f_1(f_2): \begin{cases} y_1(t) = x_2(t) \cdot q_2(t-1) \cdot \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = (\bar{x}_2(t) \vee \bar{q}_2(t-1)) \oplus q_1(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \rightarrow \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 1. \end{cases}$$

Каноническая таблица:

$x_2(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y_1(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0

Диаграмма Мура:



Состояния диаграммы не эквиваленты друг другу, поэтому она является приведенной.

7. Построим канонические таблицы и уравнения для f_1 и f_2 :

$x_1(t)$	$q_1(t-1)$	$y_1(t)$	$q_1(t)$	$x_2(t)$	$q_2(t-1)$	$y_2(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0

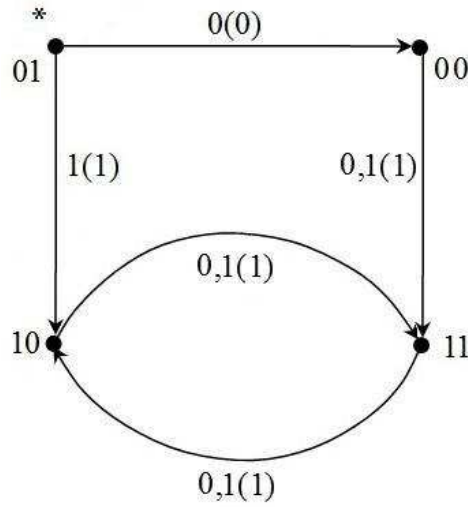
$$f_1: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

$$f_2: \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 1. \end{cases}$$

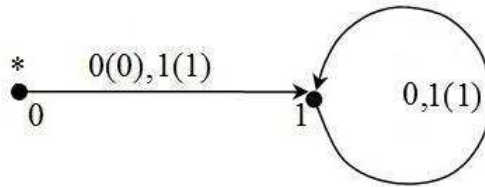
$$f_1(f_2): \begin{cases} y_1(t) = x_2(t) \vee q_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x_2(t) \vee q_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 0, \\ q_2(0) = 1. \end{cases}$$

$x_2(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y_1(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Теперь построим диаграмму Мура:



Состояния 00, 10 и 11 эквивалентны, поэтому склеим их и получим приведенную диаграмму:



Следовательно, для описания функции $f_1(f_2)$ достаточно одной переменной состояния $q'(t)$.

$x_2(t)$	$q'(t-1)$	$y_2(t)$	$q'(t)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$f_1(f_2): \begin{cases} y_1(t) = x_2(t) \vee q'(t-1), \\ q'(t) = 1, \\ q'(0) = 0. \end{cases} \blacktriangleright$$

IV.2.9(1, 4). Построить канонические уравнения и приведённую диаграмму Мура ограниченно-детерминированной функции, получающейся из функции f введением обратной связи по переменным x_i, y_j :

$$1) \ i = 2, j = 1, f: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \rightarrow q(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \oplus q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee x_2(t) \cdot \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

$$4) \ i = 1, j = 2, f: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot q(t-1) \vee x_2(t), \\ y_2(t) = x_2(t), \\ q(t) = (x_1(t) \rightarrow x_2(t)) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

- ◀ 1. $y_1(t)$ зависит от $x_2(t)$ с запаздыванием, поэтому введение обратной связи возможно. Заменим все вхождения $x_2(t)$ на правую часть уравнения $y_1(t)$:

$$\begin{cases} y_2(t) = x_1(t) \cdot (x_1(t) \rightarrow q(t-1)) \oplus q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee (x_1(t) \rightarrow q(t-1)) \cdot \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

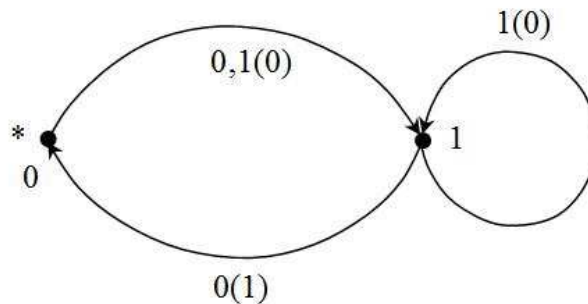
Упростим уравнения:

$$\begin{cases} y_2(t) = \bar{x}_1(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Построим каноническую таблицу:

$x_1(t)$	$q(t-1)$	$y_2(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

Построим диаграмму Мура:



Состояния диаграммы не эквивалентны, поэтому она является приведенной.

4. $y_2(t)$ зависит от $x_1(t)$ с запаздыванием, поэтому введение обратной связи возможно. Заменим все вхождения $x_1(t)$ на правую часть

уравнения $y_2(t)$:

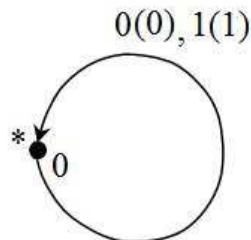
$$\begin{cases} y_1(t) = x_2(t) \cdot q(t-1) \vee x_2(t), \\ q(t) = (x_2(t) \rightarrow x_2(t)) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Упростим уравнения:

$$\begin{cases} y_1(t) = x_2(t), \\ q(t) = 1, \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

$y_1(t)$ не зависит от $q(t-1)$, поэтому уравнения переменных состояния можно отбросить: $y_1(t) = x_2(t)$.

Построим диаграмму Мура, являющуюся, очевидно, приведенной:



IV.2.10(2, 4). Найдите вес ограниченно-детерминированной функции, получающейся из ограниченно-детерминированной функции f введением обратной связи по переменным x_i, y_j :

$$2) f: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \downarrow q(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \cdot x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

а) $i = 1, j = 2$;

б) $i = 2, j = 1$;

$$4) f: \begin{cases} y_1(t) = x_2(t) \rightarrow q_1(t-1), \\ y_2(t) = q_2(t-1) \rightarrow x_1(t), \\ q_1(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0; \\ \text{а) } i = j = 1; \\ \text{б) } i = j = 2. \end{cases}$$

- ◀ 2. а) $y_2(t)$ зависит от $x_1(t)$ с запаздыванием, поэтому введение обратной связи возможно. Заменим все вхождения $x_1(t)$ на правую часть уравнения $y_2(t)$:

$$f_1: \begin{cases} y_1(t) = (x_2(t) \vee q(t-1)) \downarrow q(t-1), \\ q(t) = (x_2(t) \vee q(t-1)) \cdot x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Упростим уравнения:

$$f_1: \begin{cases} y_1(t) = \bar{x}_2(t) \cdot \bar{q}(t-1), \\ q(t) = x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

$y_1(t)$ существенно зависит от $q(t-1)$. Оба состояния достижимы, следовательно, $r(f_1) = 2$.

б) $y_1(t)$ зависит от $x_2(t)$ с запаздыванием, поэтому введение обратной связи возможно. Заменим все вхождения $x_2(t)$ на правую часть уравнения $y_1(t)$:

$$f_2: \begin{cases} y_2(t) = (x_1(t) \downarrow q(t-1)) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \cdot (x_1(t) \downarrow q(t-1)), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

$q(t) \equiv 0$, поэтому $y_2(t) = \bar{x}_1(t)$ и $r(f_2) = 1$.

4. а) $y_1(t)$ зависит от $x_1(t)$ с запаздыванием, поэтому возможно введение обратной связи. Заменим все вхождения $x_1(t)$ на правую часть уравнения $y_1(t)$:

$$f_1: \begin{cases} y_2(t) = q_2(t-1) \rightarrow (x_2(t) \rightarrow q_1(t-1)), \\ q_1(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Упростим уравнения:

$$f_1: \begin{cases} y_2(t) = \bar{q}_2(t-1) \vee \bar{x}_2(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(t) = 0. \end{cases}$$

Построим каноническую таблицу:

$x_2(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y_2(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Все четыре состояния достижимы. При $x_2(t) = 1$ состояние 01 отличается от остальных. Вне зависимости от входа мы последовательно проходим состояния 00, 10, 11, 01. Таким образом, $r(f_1) = 4$.

б) $y_2(t)$ зависит от $x_2(t)$ с запаздыванием, поэтому возможно введение обратной связи. Заменим все вхождения $x_2(t)$ на правую часть уравнения $y_2(t)$:

$$f_2: \begin{cases} y_1(t) = (q_2(t-1) \rightarrow x_1(t)) \rightarrow q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(t) = 0. \end{cases}$$

Упростим уравнения:

$$f_2: \begin{cases} y_1(t) = q_2(t-1) \cdot \bar{x}_1(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(t) = 0. \end{cases}$$

Построим каноническую таблицу:

$x_1(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y_1(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Все состояния последовательно достижимы: 00, 10, 11, 01. Выходные функции совпадают лишь для 10 и 11, но из этих состояний мы попадаем в неэквивалентные. Поэтому $r(f_2) = 4$. ►

Занятие № 2.8

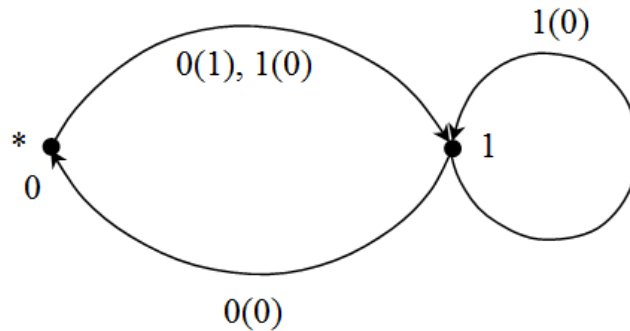
РЕАЛИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ. ПОЛНОТА В МНОЖЕСТВАХ ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

IV.2.13(3, 5). Для функции f из $P_{2,од}$ построить схему над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и функций, порождённых дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием:

3. $q(0) = 1$ и функция f задаётся канонической таблицей:

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

5. Функция f задаётся диаграммой Мура, изображённой на рисунке:



◀ 3. Построим канонические уравнения:

$$f: \begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = \bar{x}(t) \vee \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 1. \end{cases}$$

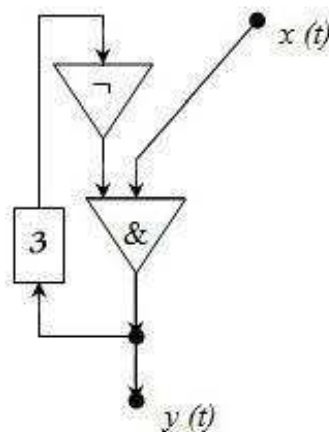
Заметим, что $q(0) = 1$, а выходной символ элемента единичной задержки — 0. Решим эту проблему следующим способом. Произведём замену: $q'(t) = \bar{q}(t)$. Тогда получаем:

$$f: \begin{cases} y(t) = x(t) \cdot \bar{q}'(t-1), \\ \bar{q}'(t) = \bar{x}(t) \vee q'(t-1), \\ q'(0) = 0. \end{cases}$$

Упростим:

$$f: \begin{cases} y(t) = x(t) \cdot \bar{q}'(t-1), \\ q'(t) = x(t) \cdot \bar{q}'(t-1), \\ q'(0) = 0. \end{cases}$$

По полученным уравнениям строим схему:

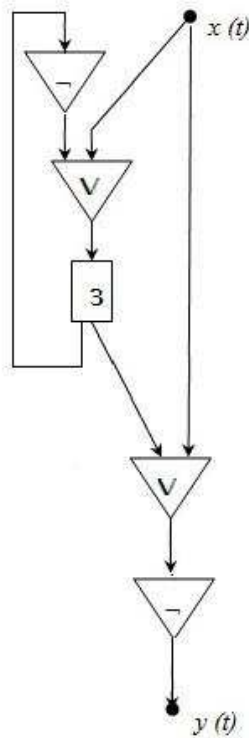


5. По диаграмме Мура построим каноническую таблицу и уравнения:

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1

$$f: \begin{cases} y(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{q}(t-1) = \overline{x(t) \vee q(t-1)}, \\ q(t) = x(t) \vee \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Схема:



IV.2.14(1, 4). По схеме, реализующей функцию f из $\hat{P}_{2, \text{од}}$, построить канонические уравнения, каноническую таблицу и диаграмму Мура:

- 1) схема изображена на рис. 1;
- 4) схема изображена на рис. 2.

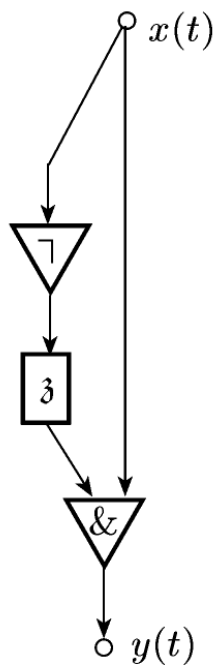


Рис. 1

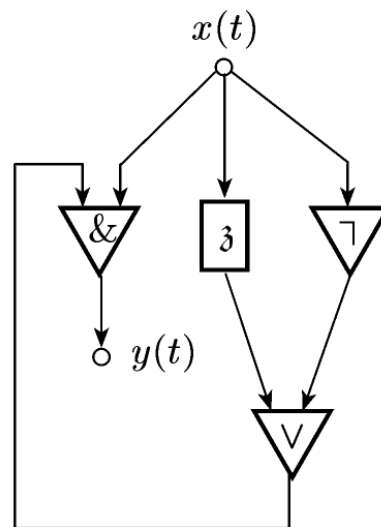


Рис. 2

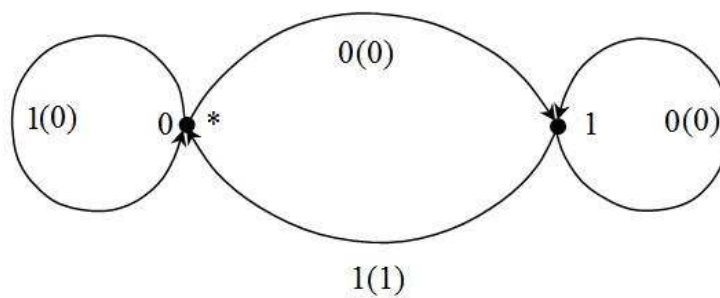
- ◀ 1. Выпишем систему канонических уравнений:

$$f: \begin{cases} y(t) = q(t-1) \cdot x(t), \\ q(t) = \bar{x}(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Каноническая таблица:

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	0

Диаграмма Мура:



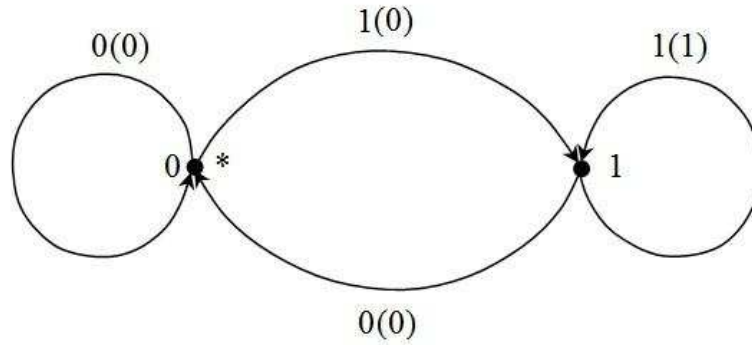
4. Выпишем систему канонических уравнений и упростим её:

$$f: \begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Каноническая таблица:

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Диаграмма Мура:



IV.2.17(1, 4). Доказать полноту системы $\{f_1, f_2\}$ в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, если:

1) $f_1: \quad y(t) = \bar{x}_1(t) \cdot \bar{x}_2(t), t \geq 1,$

$$f_2: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \cdot \bar{x}_2(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

4) $f_1: \quad y(t) = \bar{x}_1(t), t \geq 1,$

$$f_2: \begin{cases} y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \vee x_3(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x_2(t) \cdot x_3(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

◀ 1. f_1 образует полную в $P_2(t)$ систему.

В f_2 положим $x_1(t) = 0$ (константа получается из f_1). Тогда получаем элемент единичной задержки:

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, система $\{f_1, f_2\}$ полна в $\hat{P}_{2,\text{од}}$.

4. Заменяем $x_3(t)$ на $\bar{x}_2(t)$ в функции f_2 . Получим

$$f_3: y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t).$$

Система $\{f_1, f_3\}$ полна в $P_2(t)$.

Построим элемент единичной задержки. Получив константы, подставим $x_3(t) = 1$, $x_1(t) = 0$:

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, система $\{f_1, f_2\}$ полна в $\hat{P}_{2,\text{од}}$. ►

Занятие № 2.9

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА МАШИН ТЬЮРИНГА

V.1.2(1–4). Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, обладающую следующими свойствами (предполагается, что в начальный момент головка обозревает самый левый символ слова, и в качестве пустого символа берётся 0):

- 1) машина имеет одно состояние, одну команду и применима к любому слову в алфавите $\{0, 1\}$;
- 2) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$, и зона работы на каждом слове бесконечная;
- 3) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$, и зона работы на любом слове ограничена одним и тем же числом ячеек, не зависящим от выбранного слова;
- 4) машина имеет три команды, применима к словам $10^{2n}1$ ($n \geq 1$) и не применима к словам $10^{2n+1}1$ ($n \geq 0$).

- ◀ 1. Программа одной из таких машин: $q_1 0 q_1 1 S$. МТ просматривает текущую ячейку: если 1, то переходит в заключительное состояние, если 0, то записывает 1, не сдвигается и делает останов.
- 2. Программа одной из таких машин: $q_1 0 q_1 0 R$, $q_1 1 q_1 1 R$. МТ просматривает текущую ячейку и сдвигается вправо.
- 3. Программа одной из таких машин: $q_1 0 q_1 1 S$, $q_1 1 q_1 0 S$. МТ просматривает текущую ячейку и меняет её содержимое на противоположное, не сдвигаясь.
- 4. Программа одной из таких машин: $q_1 1 q_2 1 R$, $q_1 0 q_2 0 R$, $q_2 0 q_1 0 R$. После первой единицы МТ чередует состояния. Если в слове чётное количество нулей, то состояние q_2 — заключительное, иначе МТ бесконечно будет сдвигаться вправо. ▶

V.1.4(1–2). Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, переводящую конфигурации K_1 в конфигурации K_0 :

- 1) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^n 0 1^n$ ($n \geq 1$);
- 2) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 [01]^n$ ($n \geq 1$).

- ◀ 1. МТ просматривает слово с первой непустой ячейки слева. Текущую единицу заменяет на ноль, двигается вправо до нуля, пропускает его и в первой пустой клетке печатает единицу, возвращается влево, восстанавливает единицу, сдвигается вправо на следующую. Программу можно записать так:

$q_1 0 q_6 0 L,$	$q_2 0 q_3 0 R,$	$q_4 1 q_4 1 L,$	$q_5 0 q_1 1 R,$
$q_1 1 q_2 0 R,$	$q_3 1 q_3 1 R,$	$q_4 0 q_5 0 L,$	$q_6 1 q_6 1 L,$
$q_2 1 q_2 1 R,$	$q_3 0 q_4 1 L,$	$q_5 1 q_5 1 L,$	$q_6 0 q_0 0 R.$

- 2. МТ просматривает слово с первой непустой ячейки слева. Если МТ считывает нули, то каждый второй заменяет на единицу. Как только была прочитана первая единица, МТ чётные единицы меняет на нули. Доходит до конца слова, переводит головку вперед.

$q_1 0 q_2 0 R,$	$q_3 1 q_4 1 R,$	$q_4 0 q_5 0 L,$	$q_5 0 q_0 0 R.$
$q_2 0 q_1 1 R,$	$q_4 1 q_3 0 R,$	$q_5 1 q_6 1 L,$	
$q_1 1 q_3 0 R,$	$q_2 1 q_4 1 R,$	$q_6 0 q_5 0 L,$	

V.1.5(1). Показать, что для всякой машины Тьюринга существует эквивалентная ей машина, в программе которой отсутствует символ S.

- ◀ Рассмотрим оргграф, строящийся следующим образом: наличие команды $q_i \alpha q_j \beta S$ порождает наличие в графе вершин $q_i \alpha$ и $q_j \beta$ и дуги

$(q_i\alpha, q_j\beta)$. В этом графе все вершины имеют полустепень исхода не более 1. Двигаясь по дугам из произвольной вершины, мы либо попадём в контур, либо остановимся в некоторой вершине. В первом случае для всех вершин заменим исходную команду на группу команд, организующих заикливание, например, переход в новое состояние, в котором любой символ не меняется, а головка двигается вправо. Во втором случае, пусть конечная вершина маршрута $q_k\gamma$. При наличии команды вида $q_k\gamma q_l\delta T$, где $T \in \{R, L\}$ команду $q_i\alpha q_j\beta S$ заменим на $q_i\alpha q_l\delta T$. При отсутствии такой команды, добавим состояние q' , заменим команду $q_i\alpha q_j\beta S$ на $q_i\alpha q'\gamma R$ и добавим всевозможные команды вида $q'\varepsilon q_k\varepsilon L$, где в качестве ε берутся все буквы алфавита. ►

V.1.6. Показать, что для всякой машины Тьюринга T в алфавите A существует счётно-бесконечное множество эквивалентных ей машин $T_1, T_2, \dots, T_m, \dots$ в том же алфавите A , отличающихся друг от друга своими программами.

◄ В качестве машины T_m можно рассмотреть МТ, при любом входе сдвигающуюся влево на m позиций, затем сдвигающуюся вправо на m позиций, и далее реализующую преобразования машины T . ►

V.1.8(1, 3, 4). По словесному описанию машины Тьюринга построить её программу в алфавите $\{0, 1\}$.

1. Начав работу с последней единицы массива из единиц, машина «сдвигает» его на одну ячейку влево, не изменяя «остального содержимого» ленты. Головка останавливается на первой единице «перенесённого» массива.
3. Машина начинает работу с самой левой непустой ячейки и отыскивает единицу, примыкающую с левой стороны к первому слева массиву из трёх нулей («окаймлённому» единицами). Головка останавливается на найденной единице (если такая есть). Содержимое ленты не меняется.
4. При заданном $l \geq 1$ головка машины, начав работу с произвольной ячейки, содержащей единицу, двигается вправо до тех пор, пока не пройдёт подряд $l + 1$ нулей. Головка останавливается на первой ячейке за этими $l + 1$ нулями, напечатав в ней 1. Остальное содержимое ленты не меняется.

◄ 1. Программу МТ, выполняющей описанные действия, можно записать так:

$$\begin{array}{ll} q_1 1 q_2 0 L, & q_2 0 q_0 1 S. \\ q_2 1 q_2 1 L, & \end{array}$$

3. Программу соответствующей МТ можно записать так:

$$\begin{array}{lll}
 q_1 1 q_1 1 R, & q_4 1 q_5 1 L, & q_3 1 q_1 1 R, \\
 q_1 0 q_2 0 R, & q_5 0 q_5 0 L, & q_4 0 q_6 0 R, \\
 q_2 0 q_3 0 R, & q_5 1 q_0 1 S, & q_6 0 q_6 0 R, \\
 q_3 0 q_4 0 R, & q_2 1 q_1 1 R, & q_6 1 q_1 1 R.
 \end{array}$$

4. Программу соответствующей МТ можно записать так:

$$\begin{array}{l}
 q_1 1 q_1 1 R, \\
 q_i 0 q_{i+1} 0 R, i = \overline{1, l+1}, \\
 q_{l+2} 0 q_{l+3} 1 S, \\
 q_i 1 q_1 1 R, i = \overline{1, l+1}.
 \end{array}$$



Занятие № 2.10

ОПЕРАЦИИ НАД МАШИНАМИ ТЬЮРИНГА. ФУНКЦИИ, ВЫЧИСЛИМЫЕ НА МАШИНАХ ТЬЮРИНГА

V.1.9(1). Построить композицию $T_1 T_2$ машин Тьюринга T_1 и T_2 по паре состояний (q_{10}, q_{21}) и найти результат применения композиции $T_1 T_2$ к слову P (q_{20} — заключительное состояние машины T_2):

$$T_1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & q_{11} & q_{12} \\ \hline 0 & q_{12} 0 R & q_{10} 1 L \\ \hline 1 & q_{12} 1 R & q_{11} 0 R \\ \hline \end{array}$$

$$T_2: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & q_{21} & q_{22} \\ \hline 0 & q_{22} 1 R & q_{21} 1 R \\ \hline 1 & q_{21} 0 L & q_{20} 1 S \\ \hline \end{array}$$

а) $P = 1^3 0^2 1^2$;

б) $P = 1^4 0 1$.

◀ Композиция машин Тьюринга T_1 и T_2 по паре состояний (q_{10}, q_{21}) :

$$\begin{array}{lll}
 q_{11} 0 q_{12} 0 R, & q_{12} 1 q_{11} 0 R, & q_{22} 0 q_{21} 1 R, \\
 q_{11} 1 q_{12} 1 R, & q_{21} 0 q_{22} 1 R, & q_{22} 1 q_{20} 1 S, \\
 q_{12} 0 q_{21} 1 L, & q_{21} 1 q_{21} 0 L, &
 \end{array}$$

Результат применения:

а) $T_1 T_2$ не применима к $1^3 0^2 1^2$;

б) $T_1 T_2(1^4 0 1) = [10]^2 0^2 1^2$.



V.1.10(1). Найти результат применения итерации машины T по паре состояний (q_0, q_1) к слову P (заключительными являются состояния q_0 и q'_0 , $k \geq 1$):

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
$T:$	0	$q_0 0S$	$q_4 0S$	$q_5 0S$	$q_4 1R$	$q'_0 1L$
	1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_1 0R$	—	—

- а) $P = 1^{3k}$;
б) $P = 1^{3k+1}$;
в) $P = 1^{3k+2}$.

- ◀ а) Итерация по паре состояний (q_0, q_1) не применима к $P = 1^{3k}$.
б) Итерация машины Тьюринга Т не применима к словам вида $P = 1^{3k+1}$.
в) Результатом применения итераций по паре состояний (q_0, q_1) к словам вида $P = 1^{3k+2}$ ($k \geq 1$) является слово 1. ▶

V.1.14(1, 2, 4, 9, 10). Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию f :

- 1) $f(x) = \text{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$
2) $f(x) = \overline{\text{sg}}(x) = 1 - \text{sg}(x)$;
4) $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x \geq 2, \\ \text{не определено,} & \text{если } x = 0; \end{cases}$
9) $f(x, y) = x \div y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq y, \\ x - y, & \text{если } x > y; \end{cases}$
10) $f(x, y) = x - y$.

- ◀ 1. Машина Тьюринга Т выполняет следующие преобразования:
 $T(1) = 1, T(1^k) = 1^2, k \geq 2$.

$$\begin{array}{ll} q_1 1 q_2 1 R, & q_4 0 q_4 0 L, \\ q_2 1 q_3 1 R, & q_4 1 q_0 1 L, \\ q_3 1 q_3 0 R, & q_2 0 q_0 0 L, \\ q_3 0 q_4 0 L, & \end{array}$$

2. Можно построить машину можно построить МТ как композицию МТ из первого пункта и МТ, изменяющей результат:

$$\begin{array}{ll} q_1 1 q_2 1 R, & q_2 1 q_0 0 S, \\ q_2 0 q_0 1 L, & \end{array}$$

4. Машина Тьюринга Т выполняет следующие преобразования слов:
 $T(1) = NaN, T(1^2) = 1^2, T(1^k) = 1, k > 2$.

$q_11q_21R,$	$q_31q_51R,$
$q_21q_31R,$	$q_51q_51R,$
$q_30q_40L,$	$q_50q_60L,$
$q_41q_01L,$	$q_61q_60L,$
$q_20q_20S,$	$q_60q_01S.$

9. Машина Тьюринга Т выполняет следующие преобразования слов:

$$T(1^{x+1}, 1^{y+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq y, \\ 1^{x-y+1}, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Если $x > 0$ и $y > 0$, то МТ стирает по одной единице в их записи и начинает проверку заново. Если $x > 0$ и $y = 0$ или $x = 0$ и $y \geq 0$, то МТ стирает запись y и останавливается.

$q_11q_21R,$	$y = 0$, стираем запись y :
q_21q_31R , тогда $x > 0$.	$q_81q_00S,$
q_20q_40R , тогда $x = 0$.	$y > 0$, стираем 1 в x , y :
$x = 0$, стираем запись y :	$q_71q_71R,$
$q_41q_40R,$	$q_70q_90L,$
$q_40q_00S,$	$q_91q_{10}0L,$
$x > 0$, проверяем y :	$q_{10}1q_{10}1L,$
$q_31q_31R,$	$q_{10}0q_{11}0L,$
$q_30q_50R,$	$q_{11}1q_{11}1L,$
$q_51q_61R,$	$q_{11}0q_{12}0R,$
q_61q_71R , тогда $y > 0$.	$q_{12}1q_10R.$
q_60q_80L , тогда $y = 0$.	

10. Машина Тьюринга Т выполняет следующие преобразования слов:

$$T(1^{x+1}, 1^{y+1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ x - y + 1, & \text{если } x > y, \\ \text{не применима,} & \text{если } x < y. \end{cases}$$

Алгоритм аналогичен приведенному в предыдущем пункте. В случае $x = 0$ и $y > 0$ МТ заикликивается.

$q_11q_21R,$	q_50q_60L , тогда $y = 0$.
q_21q_31R , тогда $x > 0$.	$x = 0$, $y = 0$, стираем y :
q_20q_40R , тогда $x = 0$.	$q_61q_60L,$
$x = 0$, проверяем y :	$x > 0$, проверяем y :
$q_41q_51R,$	$q_31q_31R,$
q_51q_51S , цикл, так как $y > 0$.	$q_30q_70R,$

q_71q_81R ,
 q_81q_91R , тогда $y > 0$.
 $q_80q_{10}0L$, тогда $y = 0$.
 $y = 0$, стираем запись y :
 $q_{10}1q_00S$.
 $y > 0$, стираем 1 в x , y :
 q_91q_91R ,
 $q_90q_{11}0L$,

$q_{11}1q_{12}0L$,
 $q_{12}1q_{12}1L$,
 $q_{12}0q_{13}0L$,
 $q_{13}1q_{13}1L$,
 $q_{13}0q_{14}0R$,
 $q_{14}1q_10R$.



V.1.15(2, 7). Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию f :

$$\begin{aligned}
 2) \quad f(x) &= \left\lfloor \frac{1}{x-3} \right\rfloor; \\
 7) \quad f(x, y) &= \frac{2+x}{2-y}.
 \end{aligned}$$

◀ 2. Машина Тьюринга T выполняет следующие преобразования слов:

$$T(1^{x+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x+1 > 5, \\ 1^2, & \text{если } x+1 = 5, \\ \text{не применима,} & \text{если } x+1 < 5. \end{cases}$$

МТ проверяет условие $x+1 \geq 5$, если оно не выполнено, то закидывается; если же выполнено, то МТ стирает лишние единицы из исходного слова на ленте для записи ответа.

q_11q_20R , тогда $x+1 \geq 1$
 q_21q_30R , тогда $x+1 \geq 2$
 q_20q_20S , цикл, $x+1 < 5$
 q_31q_40R , тогда $x+1 \geq 2$
 q_30q_30S , цикл, $x+1 < 5$
 q_41q_50R , тогда $x+1 \geq 3$
 q_40q_40S , цикл, $x+1 < 5$
 q_51q_61R , тогда $x+1 \geq 4$
 q_50q_50S , цикл, $x+1 < 5$
 q_60q_01R , тогда $x+1 = 5$

q_61q_71R , тогда $x+1 > 5$
 $x+1 > 5$, сдвигаемся в конец слова, стираем всё, кроме левой единицы:
 q_71q_71R ,
 q_70q_80L ,
 q_81q_80L ,
 q_80q_01S .

7. Машина Тьюринга Т выполняет следующие преобразования слов:

$$T(1^{x+1}, 1^{y+1}) = \begin{cases} 1^{\frac{x+2}{2}+1}, & \text{если } y = 0, \\ 1^{x+3}, & \text{если } y = 1, \\ \text{не применима,} & \text{если } y = 1^k, k > 1. \end{cases}$$

МТ проверяет условие $y \leq 1$, если оно не выполнено, то зацикливается; если выполнено, то реализует соответствующую функцию. Считаем, что числа x и y на ленте записаны корректно. Для вычисления $\frac{x+2}{2}$ МТ приписывает две единицы к x и с помощью двух «бегающих» нулей ищет середину слова, после чего удаляет вторую половину.

$q_1 1 q_1 1 R,$	$q_{10} 1 q_{10} 1 R,$
$q_1 0 q_2 0 R,$	$q_{10} 0 q_{11} 1 L,$
$q_2 1 q_3 1 R,$	$q_{11} 1 q_{12} 0 L,$
$q_3 0 q_4 0 L,$ тогда $y = 0$	
$q_3 1 q_5 1 R,$	Двигаем левый ноль вправо
$q_5 0 q_6 0 L,$ тогда $y = 1$	$q_{12} 0 q_{15} 0 R,$
$q_5 1 q_5 1 R,$ цикл, $y > 1$	$q_{12} 1 q_{13} 1 L,$
	$q_{13} 1 q_{13} 1 L,$
$y = 1,$ реализуем $x + 2$	$q_{13} 0 q_{14} 1 R,$
$q_6 1 q_6 0 L,$ стёрли y	$q_{14} 1 q_9 0 R,$
$q_6 0 q_7 1 R,$	
$q_7 0 q_8 1 L,$	Удаляем массив справа $q_{15} 0 q_{15} 0 R,$
$q_8 1 q_8 1 L,$	$q_{15} 1 q_{16} 0 R,$
$q_8 0 q_0 0 R,$	$q_{16} 1 q_{16} 0 R,$
	$q_{16} 0 q_{17} 0 L,$
$y = 0,$ реализуем $\frac{x+2}{2}$	
$q_4 1 q_4 1 L,$	Сдвигаем головку под левую единицу $q_{17} 0 q_{17} 0 L,$
$q_4 0 q_9 1 R,$	$q_{17} 1 q_{18} 1 L,$
	$q_{18} 1 q_{18} 1 L,$
Двигаем правый ноль влево	$q_{18} 0 q_0 0 R.$
$q_9 0 q_{15} 0 R,$	
$q_9 1 q_{10} 1 R,$	



Занятие № 2.11

ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

V.2.1(9, 10, 12). Используя в качестве исходных функций только константы и простейшие функции, построить примитивно рекурсивные схемы, описывающие нижеследующие функции:

- 9) $x^2 + 2y^2$;
 10) $x! = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$
 12) $x \oplus y = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y \text{ чётное,} \\ 1, & \text{если } x + y \text{ нечётное.} \end{cases}$

◀ 9. Для начала реализуем схему $f(x, y) = x + y$:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x, \\ f(x, y + 1) &= f(x, y) + 1. \end{aligned}$$

Затем схему $g(x, y) = x \cdot y$:

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0, \\ g(x, y + 1) &= g(x, y) + x. \end{aligned}$$

Искомая функция легко получается их суперпозицией.

10. Функция $f(x) = x!$ получается применением операции примитивной рекурсии к функциям 1 и $g(x, y) = (x + 1) \cdot y$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(x + 1) &= (x + 1) \cdot f(x). \end{aligned}$$

12. Функция $\overline{\text{sg}}(x)$ реализуется схемой: $\overline{\text{sg}}(0) = 1, \overline{\text{sg}}(x + 1) = 0$. Построим схему, реализующую функцию $g(x) = x \pmod{2}$ — счетчик чётности:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \\ g(x + 1) &= \overline{\text{sg}}(g(x)). \end{aligned}$$

Тогда сумму по модулю 2 можно представить следующей схемой:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x), \\ f(x, t + 1) &= \overline{\text{sg}}(f(x, t)). \end{aligned}$$

►

V.2.2(1, 3). Применяя операцию примитивной рекурсии к функциям $g(x)$ и $h(x, y, z)$ по переменной y , построить функцию $f(x, y) = R(g, h)$, записав её в «аналитической» форме:

- 1) $g(x) = x, h(x, y, z) = x + z$;
 3) $g(x) = 2^x, h(x, y, z) = 2^x \cdot z$.

- ◀ 1. По определению операции примитивной рекурсии:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) = x, \\ f(x, t + 1) &= h(x, t, f(x, t)) = x + f(x, t). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x, \\ f(x, 1) &= x + f(x, 0) = x + x = 2x, \\ f(x, 2) &= x + f(x, 1) = x + 2x = 3x, \\ &\dots\dots\dots \\ f(x, t + 1) &= x + f(x, t) = x + tx = x(t + 1). \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x, y) = x(y + 1)$.

3. По определению операции примитивной рекурсии:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= g(x) = 2^x, \\ f(x, t + 1) &= h(x, t, f(x, t)) = 2^x \cdot f(x, t). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 2^x, \\ f(x, 1) &= 2^x \cdot f(x, 0) = 2^x \cdot 2^x = 2^{2x}, \\ f(x, 2) &= 2^x \cdot f(x, 1) = 2^x \cdot 2^{2x} = 2^{3x}, \\ &\dots\dots\dots \\ f(x, t + 1) &= 2^x \cdot f(x, t) = 2^x \cdot 2^{tx} = 2^{x(t+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x, y) = 2^{x(y+1)}$. ▶

V.2.3 (1–3, 5, 8, 11). Доказать примитивную рекурсивность следующих функций, используя простейшие функции и функции $\text{sg}(x)$, $\overline{\text{sg}}(x)$, $x + y$, $x \div y$, $x \cdot y$, $x \oplus y$:

- 1) $|x - y|$;
- 2) $\min(x, y)$;
- 3) $\max(x, y)$;
- 5) $\left[\frac{x}{y} \right] = \begin{cases} x, & \text{если } y = 0, \\ \text{целая часть от деления } x \text{ на } y, & \text{если } y \geq 1; \end{cases}$
- 8) $f(x) = \begin{cases} a_i, & \text{если } x = i, \ i = 0, 1, \dots, m, \\ c & \text{в ином случае;} \end{cases}$
здесь $a_0, a_1, \dots, a_m, c$ — произвольные натуральные числа;
- 11) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

◀ Для доказательства представим функции в виде суперпозиции данных примитивно рекурсивных функций.

1. $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$.
2. $\min(x, y) = x \cdot \overline{\text{sg}}(x \dot{-} y) + y \cdot \text{sg}(x \dot{-} y)$.
3. $\max(x, y) = (x \dot{-} y) + y$.
5. Искомую функцию можно представить в виде

$$\frac{x}{y} = \sum_{t=1}^x (yt \leq x) = \sum_{t=1}^x \text{sg}((x+1) \dot{-} yt).$$

Функция $g(x, y, z) = \sum_{t=1}^z \text{sg}(x \dot{-} yt)$ описывается схемой:

$$\begin{aligned} g(x, y, 0) &= 0, \\ g(x, y, z+1) &= \text{sg}(x \dot{-} y(z+1)) + g(x, y, z). \end{aligned}$$

Отождествив переменные x и z функции $g(x, y, z)$, получим искомую функцию.

8. $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \overline{\text{sg}}|x - i| + c \cdot \prod_{i=0}^m \text{sg}|x - i|$.
11. Функция $g(x, y) = \sum_{t=1}^y \text{sg}(x \dot{-} t^2)$ описывается следующей схемой:

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0, \\ g(x, y+1) &= \text{sg}(x \dot{-} (y+1)^2) + g(x, y). \end{aligned}$$

Так как функцию $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{t=1}^x (t^2 \leq x) = \sum_{t=1}^x \text{sg}((x+1) \dot{-} t^2),$$

то она является примитивно рекурсивной. ▶

V.2.4(1, 2, 5).

1. Доказать, что если функция $g(x)$ примитивно рекурсивна, то всюду определённая функция $f(x)$, отличающаяся от $g(x)$ только в конечном числе точек, является примитивно рекурсивной.
2. Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — примитивно рекурсивные функции. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } a \leq x \leq b, \\ g_2(x), & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

где $0 \leq a \leq b$ ($a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$), примитивно рекурсивна.

5. Пусть функция $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geq 1$, примитивно рекурсивна. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

$$\begin{aligned} \text{а) } f_1(\tilde{x}^n) &= \sum_{i=0}^{x_n} g(x_1, \dots, x_{n-1}, i); \\ \text{б) } f_2(\tilde{x}^n) &= \prod_{i=0}^{x_n} g(x_1, \dots, x_{n-1}, i). \end{aligned}$$

◀ 1. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — все точки, в которых значения f и g различаются. Тогда функцию $f(x)$ можно выразить через $g(x)$ с помощью суперпозиции примитивно рекурсивных функций:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \overline{\text{sg}}|x - a_i| + g(x) \cdot \prod_{i=1}^m \text{sg}|x - a_i|,$$

где $c_i = f(a_i)$ — значения функции f в точках a_i , $i = \overline{1, m}$.

Следовательно, $f(x)$ — примитивно рекурсивна.

2. Функцию $f(x)$ можно выразить через $g_1(x)$ и $g_2(x)$ с помощью суперпозиции примитивно рекурсивных функций:

$$f(x) = g_1(x) \cdot \text{sg}[(b+1) \div x)((x+1) \div a)] + g_2(x) \cdot \overline{\text{sg}}[(b+1) \div x)((x+1) \div a)].$$

5. а) Функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ можно получить как результат применения операции примитивной рекурсии к функциям $g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $h(x, y) = x + y$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) &= g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t+1) &= h(g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t+1), f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)). \end{aligned}$$

б) Функцию $f_2(\tilde{x}^n)$ можно получить как результат применения операции примитивной рекурсии к функциям $g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $h(x, y) = x \cdot y$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) &= g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t+1) &= h(g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t+1), f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)). \end{aligned} \blacktriangleright$$

Занятие № 2.12

ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

V.2.5 (1–3, 7, 11, 12). Применить операцию минимизации к функции f по переменной x_i . Результирующую функцию $g(x)$ представить в «аналитической» форме:

- 1) $f(x_1) = 3, i = 1;$
- 2) $f(x_1) = x_1 + 2, i = 1;$
- 3) $f(x_1) = x_1 \div 2, i = 1;$
- 7) $f(x_1) = [\frac{x_1}{2}], i = 1;$
- 11) $f(x_1, x_2) = x_1 \div x_2, i = 1, 2;$
- 12) $f(x_1, x_2) = \text{sg}(x_1 \div 2x_2), i = 1.$

- ◀ 1. Так как множество значений функции $f(x)$ $E_f = \{3\}$, то $g(x)$ не определена при $x \neq 3$. Применим операцию минимизации к $f(x_1)$: $f(0) = 3$, следовательно, $g(3) = 0$. В качестве «аналитической» записи функции $g(x)$ можно выбрать формулу $-|x - 3|$.
2. $E_f = \{2, 3, \dots\}$. Применим операцию минимизации к $f(x_1)$:

$$\begin{array}{ll}
 f(0) = 2, & g(2) = 0, \\
 f(1) = 3, & g(3) = 1, \\
 \dots\dots & \text{тогда} \quad \dots\dots \\
 f(x_1) = x_1 + 2, & g(x + 2) = x.
 \end{array}$$

Следовательно, $g(x) = x - 2$.

3. $E_f = \{0, 1, \dots\}$. Применим операцию минимизации к $f(x_1)$:

$$\begin{array}{ll}
 f(0) = 0, & g(0) = 0, \\
 f(1) = 0, & - \\
 f(2) = 0, & \text{тогда} \quad - \\
 f(3) = 1, & g(1) = 3, \\
 \dots\dots & \dots\dots \\
 f(x_1) = x_1 - 2 (x_1 > 2), & g(x - 2) = x.
 \end{array}$$

Следовательно, $g(x) = (x + 2) \cdot \text{sg}(x)$.

7. $E_f = \{0, 1, \dots\}$. Применим операцию минимизации к $f(x_1)$:

$$\begin{array}{l}
 f(0) = 0, \\
 f(1) = 0, \\
 f(2) = 1, \\
 f(3) = 1, \\
 \dots\dots \\
 f(2x_1) = x_1, \\
 f(2x_1 + 1) = x_1.
 \end{array}$$

Следовательно, $g(x) = 2x$.

11. Минимизация по x_1 :

$$\begin{aligned}
 0 \dot{-} x_2 &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_2 \dot{-} x_2 &= 0, \\
 (x_2 + 1) \dot{-} x_2 &= 1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 (x_2 + t) \dot{-} x_2 &= t.
 \end{aligned}$$

Отсюда $\mu_{x_1}(x_1 \dot{-} x_2) = (x_1 + x_2) \cdot \text{sg}(x_1)$.

Минимизация по x_2 :

$$\begin{aligned}
 x_1 \dot{-} 0 &= x_1, \\
 x_1 \dot{-} 1 &= x_1 \dot{-} 1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_1 \dot{-} x_1 &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_1 \dot{-} (x_1 + t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда $\mu_{x_2}(x_1 \dot{-} x_2) = x_1 - x_2$.

12. Функция $\text{sg}(x_1 \dot{-} 2x_2)$ всюду определена и принимает два значения: 0 и 1.

$$\begin{aligned}
 \text{sg}(0 \dot{-} 2x_2) &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \text{sg}(2x_2 \dot{-} 2x_2) &= 0, \\
 \text{sg}((2x_2 + 1) \dot{-} 2x_2) &= 1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \text{sg}((2x_2 + t) \dot{-} 2x_2) &= 1.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \mu_{x_1}(\text{sg}(x_1 \dot{-} 2x_2)) \big|_{x_1=0} &= 0, \\
 \mu_{x_1}(\text{sg}(x_1 \dot{-} 2x_2)) \big|_{x_1=1} &= 2x_2 + 1.
 \end{aligned}$$

Функция определена в двух точках $x_1 = 0$, $x_1 = 1$. Во всех остальных точках значение функции не определено. Выразим искомую функцию аналитически:

$$\mu_{x_1}(\text{sg}(x_1 \dot{-} 2x_2)) = (1 - x_1) \cdot 0 + \text{sg}(x_1)(2x_2 + 1). \quad \blacktriangleright$$

V.2.7(1, 6). Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

- 1) $\mu_x \left(\left[\frac{x \dot{-} 1}{2} \right] \right);$
- 6) $\mu_x (x \dot{-} [\sqrt{x}]^2).$

◀ Для доказательства достаточно представить функцию в виде суперпозиции примитивно рекурсивных функций.

1. Пусть $f(x) = \mu_x \left(\left[\frac{x \dot{-} 1}{2} \right] \right)$. Множество значений функции $E_f = \{0, 1, \dots\}$. При $\alpha_1 > 0$ минимальным решением уравнения $f(y) = \alpha_1$ является $y = 2\alpha_1 + 1$. При $\alpha_1 = 0$ наименьшим решением является $y = 0$. Определим $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ 2x + 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Тогда $g(x) = \text{sg}(x) \cdot (2x + 1)$. Функции $\text{sg}(x)$, $x + y$ и $x \cdot y$ являются примитивно рекурсивными, следовательно, их суперпозиция тоже примитивно рекурсивна.

6. Пусть $f(x) = \mu_x (x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)$. $E_f = \{0, 1, \dots\}$. При $x = n^2$, $n \in \{0, 1, \dots\}$, функция $f(x) = 0$. На интервале $I_n = (n^2, (n+1)^2)$ функция возрастает и принимает значения $E_f^n = \{0, 1, \dots, (n+1)^2 - n^2\} = \{0, 1, \dots, 2n+1\}$. На каждом интервале I_n добавляется два новых значения $f(x)$: $x = 2n$, $x = 2n+1$. Минимальным решением уравнения $f(y) = \alpha_1$ при любых α_1 является $y = [(\alpha_1 + 1)/2]^2 + \alpha_1$. Следовательно,

$$g(x) = [(x+1)/2]^2 + x$$

является суперпозицией примитивно рекурсивных функций, следовательно, примитивно рекурсивна. ▶

V.2.8(1, 2).

1. Доказать, что однократное применение операции минимизации к всюду определённой числовой функции приводит к функции, определённой хотя бы в одной точке.
 2. Привести пример одноместной примитивно рекурсивной функции, из которой двукратным применением операции минимизации можно получить нигде не определённую функцию.
- ◀ 1. Всюду определённая функция $f(x)$ в точке $x = 0$ принимает значение $f(0)$. Тогда, применив операцию минимизации, получим, что $\mu(f(x))|_{x=0} = 0$.

2. Если функция не определена в нуле, то применением к ней операции минимизации получим нигде не определённую функцию. Не определённую в нуле функцию можно получить применением операции минимизации к любой функции, не принимающей значение ноль, например, $f(x) = x + 1$. ►

V.2.10(1, 4). Обосновать вычислимость следующих функций:

$$1) f(x, y, z) = \left[\frac{2}{x+1} \right] \cdot (x - \overline{\text{sg}}(2^x \dot{-} y)) \dot{-} (x+1)^3;$$

$$4) f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{z+1} \cdot 2^{(x^3+y) \cdot \overline{\text{sg}}(x \dot{-} y \cdot z)}.$$

◄ Среди используемых функций есть две частично рекурсивные: $x - y$ и $\frac{x}{y}$. Частичная рекурсивность $x - y$ обосновывалась выше (V.2.5(11)). Непосредственно убеждаемся, что $\frac{x}{y} = \mu_x(x \cdot y)$. Остальные используемые функции примитивно рекурсивны. ►

Список литературы

- [1] Алексеев В. Б. *Лекции по дискретной математике. Учебное пособие.* М.: Инфра-М, 2012.
- [2] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. *Задачи и упражнения по дискретной математике* М.: Физматлит, 2004.
- [3] Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику.* М.: Наука, 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1. Курс «Дискретная математика»	3
Занятие № 1.1. Функции алгебры логики. Формулы. Существенные и фиктивные переменные	3
Занятие № 1.2. ДНФ, КНФ, СФЭ	7
Занятие № 1.3. Полиномы и линейные функции	9
Занятие № 1.4. Замкнутые классы	13
Занятие № 1.5. Класс М. Подсчёт числа функций	15
Занятие № 1.6. Полнота и шепферовость в алгебре логики	18
Занятие № 1.7. Графы: изоморфизм, связность	20
Занятие № 1.8. Графы: деревья, гомеоморфизм	26
Занятие № 1.9. Графы: планарность, раскраски, орграфы	28
Занятие № 1.10. Алфавитное кодирование. Оптимальные коды ...	32
Занятие № 1.11. Коды, исправляющие ошибки	37
Занятие № 1.12. Автоматы. Часть 1	41
Занятие № 1.13. Автоматы. Часть 2	45
Часть 2. Курс «Дополнительные главы дискретной математики»	53
Занятие № 2.1. Элементарные функции многозначной логики. Представление функций в первой и второй формах	53
Занятие № 2.2. Замкнутые классы. Представление функций полиномами по модулю k	55
Занятие № 2.3. Полнота систем функций многозначной логики ...	60
Занятие № 2.4. Исследование систем функций на полноту. Критерий Слупецкого	63
Занятие № 2.5. Задание детерминированных и ограниченно-детерминированных функций деревьями	66
Занятие № 2.6. Представление ограниченно-детерминированных функций диаграммами Мура и каноническими уравнениями	69
Занятие № 2.7. Операции над ограниченно-детерминированными функциями	73
Занятие № 2.8. Реализация ограниченно-детерминированных функций схемами. Полнота в множествах ограниченно-детерминированных функций	82
Занятие № 2.9. Простейшие свойства машин Тьюринга	87
Занятие № 2.10. Операции над машинами Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга	90

Занятие № 2.11. Прimitивно рекурсивные функции	94
Занятие № 2.12. Частично рекурсивные функции	98
Список литературы	103